I. megoldás. Az egyenlet bal oldala pozitív, így x és y egyike sem nulla. Mindkét oldalt $4xy$-nal osztva az eredetivel ekvivalens

$$\left(4x+\frac{1}{4x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)=4 \tag{1}$$

egyenlethez jutunk. Ismeretes, hogy minden a valós számra $\left|a+\frac{1}{a}\right| \geq 2$, és csak akkor van egyenlőség, ha $a=\pm 1$. Eszerint (1) bal oldalán mindkét tényező abszolút értéke legalább 2, így az egyenlőséghez $|4x|=|y|=1$ szükséges, valamint az, hogy (1) bal oldalán a két tényező előjele azonos legyen.

Innen két megoldás adódik: $4x=y=1$-ből $x=\frac{1}{4}$ és $y=1$, $4x=y=-1$-ből pedig $x=-\frac{1}{4}$ és $y=-1$. Látható, hogy mindkét számpár megoldása a feladatnak.

II. megoldás. Az egyenlet bal oldalán a beszorzást elvégezve, rendezés után írjuk fel a kapott kétváltozós polinomot x hatványai szerint:

$$16(y^2+1)x^2-16yx+(y^2+1)=0. \tag{2}$$

Mivel $16(y^2+1)$ pozitív, (2) bal oldala pontosan akkor nulla, ha

$$x^2-\frac{y}{y^2+1}x+\frac{1}{16}=0. \tag{3}$$

Adott y esetén tehát 0, 1 vagy 2 olyan x létezik, amelyre az $(x,\,y)$ számpár megoldása az egyenletnek, attól függően, hogy a paraméteres (3) egyenlet $D(y)$ „diszkriminánsa” negatív, nulla vagy pozitív. $D(y)$ két négyzet különbségeként szorzattá alakítható:

$$\begin{aligned} D(y)&=\left(\frac{y}{y^2+1}\right)^2-\frac{1}{4}=\left(\frac{y}{y^2+1}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{y}{y^2+1}-\frac{1}{2}\right)=\\ &=\frac{2y+y^2+1}{2(y^2+1)}\cdot\frac{2y-(y^2+1)}{2(y^2+1)}, \end{aligned}$$

így

$$D(y)=\frac{(y+1)^2}{2(y^2+1)}\cdot\left(-\frac{(y-1)^2}{2(y^2+1)}\right)=-\left(\frac{y^2-1}{2(y^2+1)}\right)^2.$$

Azt kapjuk, hogy $D(y)$ egy teljes négyzet ellentettje, és így nem lehet pozitív. Az y-nak pontosan azokra az értékeire kapunk megoldást, amelyekre $D(y)=0$, azaz

$$\frac{y^2-1}{2(y^2+1)}=0;$$

ez pontosan akkor teljesül, ha $y=\pm 1$. Ha $y=1$, akkor (3) szerint

$$x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{16}=\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=0, \quad x=\frac{1}{4},$$

míg $y=-1$ esetén

$$x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2=0 \quad x=-\frac{1}{4}.$$

Az egyenletnek tehát két megoldása van: az $\left(\frac{1}{4};\ 1\right)$ és a $\left(-\frac{1}{4};-1\right)$ számpárok.

Megjegyzések. 1. Komplex számok felhasználásával (3) bal oldalát a következőképpen alakíthatjuk át: Legyen $f(y)=\frac{y}{y^2+1}$, $g(y)=\frac{y^2-1}{2(y^2+1)}$; ekkor (3) pontosan akkor teljesül, ha

$$x_{1,2}=\frac{f(y)\pm\sqrt{-g^2(y)}}{2}=\frac{f(y)+ig(y)}{2} \quad \text{ahol} \quad i^2=-1.$$

Innen azt kapjuk, hogy (3) bal oldala az alábbi „gyöktényezős” alakba írható:

$$\left(x-\frac{f(y)+ig(y)}{2}\right)\left(x-\frac{f(y)-ig(y)}{2}\right).$$

A beszorzást elvégezve kapjuk, hogy

$$x^2 - f(y)x + \frac{f^2(y)}{4} + \frac{g^2(y)}{2} = \left(x - \frac{f(y)}{2}\right)^2 + \left(\frac{g(y)}{2}\right)^2,$$

azaz (3) bal oldala két négyzet összege:

$$\left(x - \frac{y}{2(y^2+1)}\right)^2 + \left(\frac{y^2-1}{4(y^2+1)}\right)^2.$$

2. A (2) kétváltozós polinom másképpen is felbontható két négyzet összegére; könnyen ellenőrizhető, hogy

$$(16x^2+1)(y^2+1) - 16xy = (4xy-1)^2 + (4x-y)^2.$$

Ebből az alakból ugyancsak eljuthatunk a megoldáshoz, hiszen két valós szám négyzetének összege pontosan akkor nulla, ha mind a két szám nulla.