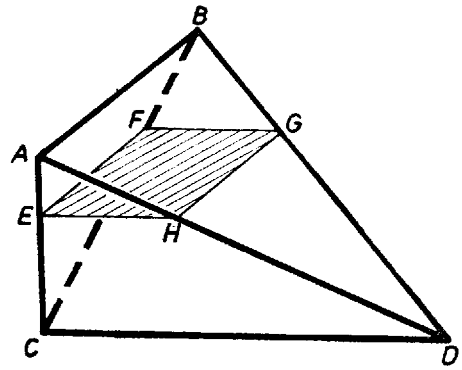
Ha az $ABCD$ tetraédert az S sík téglalapban metszi, akkor S-nek a tetraéder négy élével van közös pontja; ez azt jelenti, hogy S-nek mindkét oldalán két-két tetraédercsúcs helyezkedik el.



Tegyük fel, hogy a síkmetszet az $EFGH$ téglalap, melynek csúcsai rendre az AC, CB, BD, DA éleken vannak (lásd az ábrát). Megmutatjuk, hogy a tetraéder AB éle párhuzamos az EF és HG szakaszokkal. Tekintsük az ABC, ABD és $EFGH$ síkokat; e síkok páronkénti metszésvonalai rendre AB, EF és HG. Ismeretes, hogy három, egymást páronként metsző sík metszésvonalai vagy egy ponton mennek át, vagy pedig párhuzamosak (lásd pl. Geometriai feladatok gyűjteménye I., 1703. feladat). Esetünkben tudjuk, hogy EF és HG párhuzamosak, tehát AB is csak ezekkel párhuzamos lehet. Ugyanígy kapjuk, hogy CD, FG és EH is párhuzamosak. Az EF és FG szakaszok viszont egymásra merőlegesek, ezért a velük párhuzamos AB és CD élek is merőlegesek egymásra. Tehát, ha egy tetraédernek van téglalap alakú síkmetszete, akkor a tetraédernek van két egymásra merőleges kitérő éle.

Belátjuk, hogy ez a feltétel elégséges is, azaz: ha egy tetraéder két szemközti éle merőleges egymásra, akkor a tetraédernek van téglalap alakú síkmetszete. Tegyük fel, hogy az $ABCD$ tetraéder AB és CD éle egymásra merőleges. Messük el a tetraédert egy olyan $EFGH$ síkkal, amelyik AB-vel és CD-vel is párhuzamos. (Ilyen sík valóban létezik; pontosan azok a síkok felelnek meg, amelyek merőlegesek a két egyenes normáltranszverzálisára.) Tekintsük ismét az ABC, ABD és $EFGH$ síkok páronkénti metszésvonalait, AB-t, EF-et és GH-t. Ha EF és GH metszené egymást, akkor ezen a metszésponton AB-nek is át kellene mennie; ez azonban lehetetlen, hiszen akkor EF és GH metszéspontja az AB-vel párhuzamos $EFGH$ síkban lenne. Tehát EF és GH egymással is és AB-vel is párhuzamosak. Ugyanígy kapjuk, hogy CD, FG és EH párhuzamosak. Vagyis az $EFGH$ négyszög paralelogramma, mivel szemközti oldalai párhuzamosak. EF és FG szöge megegyezik a velük párhuzamos AB és CD szögével, vagyis 90°. Ez éppen azt jelenti, hogy az $EFGH$ paralelogramma téglalap.

Tehát pontosan azoknak a tetraédereknek van téglalap alakú síkmetszetük, amelyeknek van két egymásra merőleges kitérő élük.

Megjegyzések. 1. Bizonyításunk második részéből az is kiderült, hogy ha egy tetraédert két kitérő élével párhuzamos síkokkal metszünk, akkor a síkmetszet paralelogramma. Ez azt jelenti, hogy minden tetraédernek van paralelogramma alakú síkmetszete.

2. Ha az E, F, G, H pontokat úgy választjuk a tetraéder AC, BC, BD és AD élein, hogy valamely λ számmal $AE=\lambda\cdot AC$, $AH=\lambda\cdot AD$, $BF=\lambda\cdot BC$ és $BG=\lambda\cdot BD$ teljesüljön, akkor az AEH és ACD, BFG és BCD, CEF és CAB, DHG és DAB háromszögpárok hasonlóak, hiszen megegyezik két-két oldaluk aránya és az azok által bezárt szög. Ezért $EH=FG=\lambda\cdot CD$ és $EF=HG=(1-\lambda)\cdot AB$. Másrészt például EH és FG párhuzamosak is – mindkettő párhuzamos CD-vel –, tehát az $EFGH$ négyszög paralelogramma. Ha λ-t úgy választjuk, hogy $EH=EF$ teljesüljön, azaz $\lambda=\dfrac{AB}{AB+CD}$, akkor az $EFGH$ paralelogramma rombusz. Tehát *minden tetraédernek van rombusz alakú síkmetszete.*

3. Az előző pontban leírtakból, valamint feladatunk eredményéből következik, hogy *ha egy tetraédernek van téglalap alakú síkmetszete, akkor négyzet alakú síkmetszete is van.*