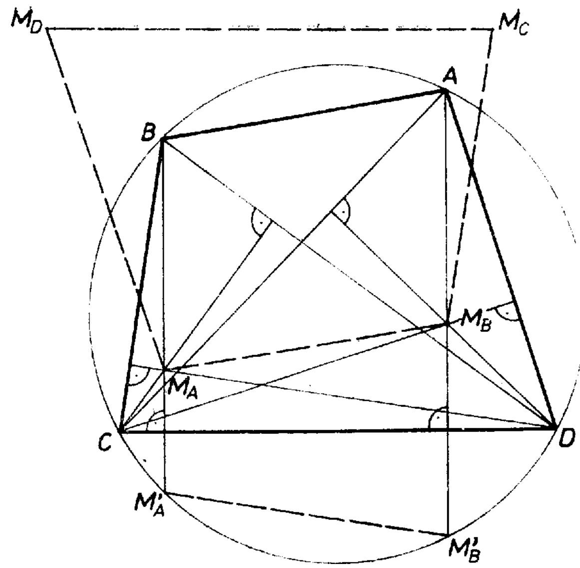
I. megoldás. Elegendő megmutatnunk, hogy a két négyszög megfelelő oldalai párhuzamosak és egyenlő hosszúak. Ez pontosan akkor teljesül, ha az ABM_AM_B, BCM_BM_C, CDM_CM_D és DAM_DM_A négyszögek paralelogrammák. A bizonyítást az 1. ábrán látható ABM_AM_B négyszögre végezzük el, a többi négyszögre is lényegében ugyanaz a bizonyítás.



1. ábra

A BM_A és az AM_B egyenesek párhuzamosak, mert mindkettő merőleges a CD egyenesre – mint a BCD, ill. ACD háromszög CD oldalához tartozó magassága. Tükrözzük az M_A és M_B pontokat a CD oldalra. Ismert, hogy az így kapott M_A' és M_B' tükörképek rajta vannak a BCD, illetve az ACD háromszög köré írt körön, ami esetünkben megegyezik a húrnégyszög köré írt körrel. Ezért a $BM_A'M_B'A$ négyszög húrnégyszög. Viszont a BM_A és az M_AM_A' egyenesek egyaránt merőlegesek CD-re, ezért a BM_A' egyenes is merőleges CD-re, tehát a $BM_A'M_B'A$ húrnégyszög két szemközti oldala párhuzamos, vagyis a négyszög szimmetrikus trapéz. Ha viszont egy szimmetrikus trapéz egyik szárát egy, az alapokra merőleges egyenesre tükrözzük, akkor a tükörkép párhuzamos a másik szárral. Ezért az M_AM_B egyenes mint az $M_A'M_B'$ szár CD-re vonatkozó tükörképe – párhuzamos az AB egyenessel. Vagyis az ABM_AM_B négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, tehát a négyszög paralelogramma.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

II. megoldás. Legyenek a húrnégyszög köré írt kör O középpontjából a csúcsokba mutató vektorok $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, a magasságpontokba mutató vektorok pedig $\mathbf{m}_a$, $\mathbf{m}_b$, $\mathbf{m}_c$, $\mathbf{m}_d$. Ismeretes (l. pl. *Geometriai feladatok gyűjteménye* I., 3053. feladat) – hogy minden háromszögben a körülírt kör középpontjából a csúcsokba mutató vektorok összege megegyezik a középpontból a magasságpontokba mutató vektorral. Esetünkben négy háromszögnek közös a körülírt köre, ezért:

$$\mathbf{m}_a=\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d};\quad \mathbf{m}_b=\mathbf{a}+\mathbf{c}+\mathbf{d};\quad \mathbf{m}_c=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{d};\quad \mathbf{m}_d=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}.$$

Az eredeti négyszög oldalvektorai:

$$\overrightarrow{BA}=\mathbf{a}-\mathbf{b},\quad \overrightarrow{CB}=\mathbf{b}-\mathbf{c},\quad \overrightarrow{DC}=\mathbf{c}-\mathbf{d}\quad \text{és}\quad \overrightarrow{AD}=\mathbf{d}-\mathbf{a}.$$

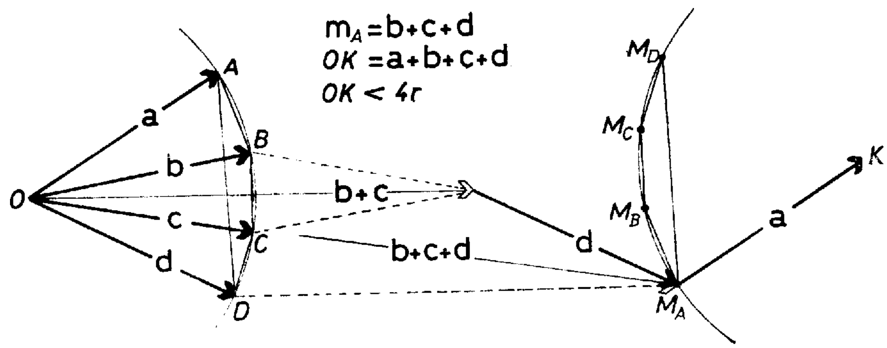
A magasságpontok által meghatározott négyszög oldalvektorai:

$$\overrightarrow{M_AM_B}=\mathbf{m}_b-\mathbf{m}_a=(\mathbf{a}+\mathbf{c}+\mathbf{d})-(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})=\mathbf{a}-\mathbf{b}=\overrightarrow{BA},$$

$$\overrightarrow{M_BM_C}=\mathbf{m}_c-\mathbf{m}_b=(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{d})-(\mathbf{a}+\mathbf{c}+\mathbf{d})=\mathbf{b}-\mathbf{c}=\overrightarrow{CB},$$

$$\overrightarrow{M_CM_D}=\mathbf{m}_d-\mathbf{m}_c=(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})-(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{d})=\mathbf{c}-\mathbf{d}=\overrightarrow{DC},$$

$$\overrightarrow{M_DM_A}=\mathbf{m}_a-\mathbf{m}_d=(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})-(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{d}-\mathbf{a}=\overrightarrow{AD}.$$



2. ábra

Tehát a húrnégyszög oldalvektorai rendre megegyeznek a magasságpontok által alkotott négyszög oldalvektoraival. Ebből pedig következik, hogy a két négyszög egybevágó.

Várady Péter (Győr, Révai M. Gimn., I. o. t.)
dolgozata alapján