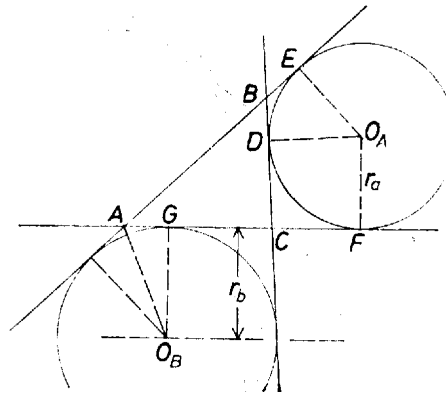
I. megoldás. Tekintsük a feladatot megoldottnak. Az ABC háromszög BC oldalához hozzáírt kör érintse a háromszög oldalegyeneseit a D, F, E pontokban, az AC oldalhoz hozzáírt kör pedig ezt az oldalt a G pontban (1. ábra).



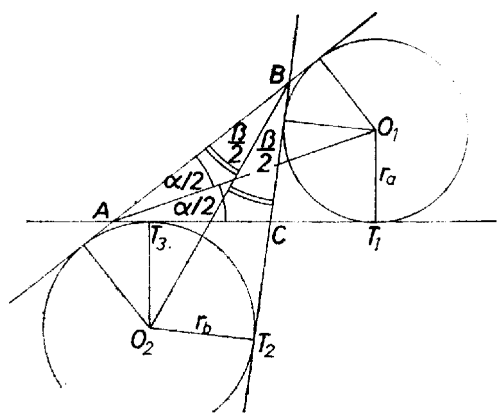
1. ábra

Tudjuk, hogy egy külső pontból a körhöz húzott két érintőszakasz egyenlő, ezért $BD = BE$ és $CD = CF$; tehát az $AE = AB + BE$ és az $AF = AC + CF$ szakaszok összege megegyezik az ABC háromszög kerületével. De $AE = AF$, tehát mindkét szakasz hosszúsága megegyezik a háromszög félkerületével, s-sel. Ezt felhasználva már el tudjuk végezni a szerkesztést:

Felveszünk egy r_a sugarú kört és a kerületén tetszőlegesen kijelöljük az F pontot. Megszerkesztjük a kör F-beli érintőjét és erre felmérjük az $FA = s$ távolságot, ami adott. Ezután A-ból megszerkesztjük a körhöz a másik érintőt (ez éppen a háromszög AB oldalegyenese). A másik hozzáírt kör érinti az AF és az AB egyeneseket, sugara pedig adott, tehát ezt a kört is meg tudjuk szerkeszteni. (A kör középpontja rajta van az FAB szög külső szögfelezőjén, és az AB egyenestől r_b távolságra lévő párhuzamos egyenesen is.) Végül a BC egyenest úgy kapjuk, hogy megszerkesztjük a két kör AF-től különböző közös belső érintőjét. (Két kör közös érintőjének szerkesztése megtalálható pl. a *Geometriai feladatok gyűjteménye* I. 633. feladatában.) A leírtakból következik, hogy az így szerkesztett ABC háromszög egyik hozzáírt körének sugara r_a, egy másik hozzáírt körének sugara r_b, kerülete pedig $2AF = 2s$, vagyis a háromszög megfelel a követelményeknek.

A szerkesztés pontosan akkor végezhető el, ha a G pont az AF szakasz belső pontja. Ebben az esetben 1 megoldás van, egyébként pedig nincs megoldás. (A II. megoldásban megmutatjuk, hogy G pontosan akkor belső pontja az AF szakasznak, ha $r_a \cdot r_b < s^2$.)

II. megoldás. Használjuk a 2. ábra jelöléseit.



2. ábra

Az AT_1O_1 és BT_2O_2 derékszögű háromszögeket meg tudjuk szerkeszteni, hiszen ismert két-két befogójuk ($AT_1 = BT_2 = s$, $O_1T_1 = r_a$ és $O_2T_2 = r_b$). Az AO_1 és a BO_2 egyenesek viszont szögfelezők az ABC háromszögben, tehát $O_1AT_1\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$ és $O_2BT_2\sphericalangle = \dfrac{\beta}{2}$. Ezért a szerkesztendő ABC háromszög két szöge megszerkeszthető az AT_1O_1 és a BT_2O_2 háromszögek segítségével. Így tudunk szerkeszteni ABC-hez hasonló $A'B'C'$ háromszöget, majd ezt a kerületek arányában nagyítva/kicsinyítve kapjuk az ABC háromszöget. Az így szerkesztett háromszög nyilván eleget tesz a feltételeknek.

A szerkeszthetőségnek az a feltétele, hogy $\alpha+\beta$ $180°$-nál kisebb (és természetesen pozitív) legyen. Ez ekvivalens a $0° < \frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2} < 90°$ feltétellel; azaz pontosan akkor létezik megoldás, ha $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) > 0$. Mivel $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r_a}{s}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{r_b}{s}$, ezért

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}=\frac{\frac{r_a}{s}+\frac{r_b}{s}}{1-\frac{r_a\cdot r_b}{s^2}}.$$

Ez a tört akkor pozitív, ha a nevezője pozitív, tehát a megszerkesztendő háromszög pontosan akkor létezik, ha $s^2 > r_a\cdot r_b$. Ekkor a feladatnak 1 megoldása van, egyébként pedig nincs megoldása.

Mikulás Imre (Nyíregyháza, Krúdy Gyula Gimn., II. o. t.)
dolgozata alapján