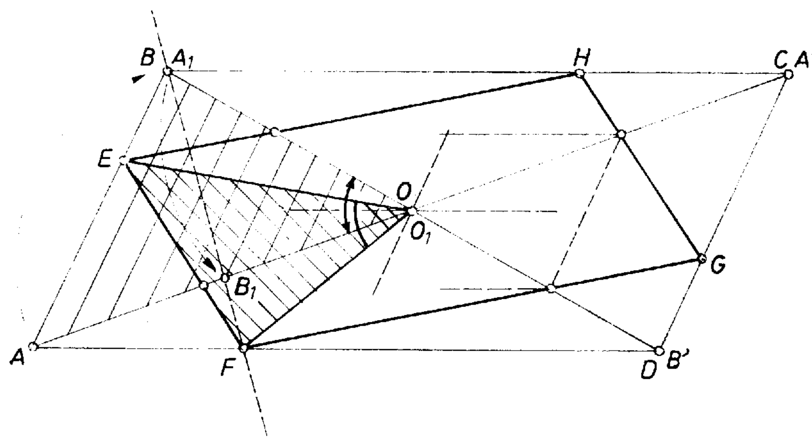
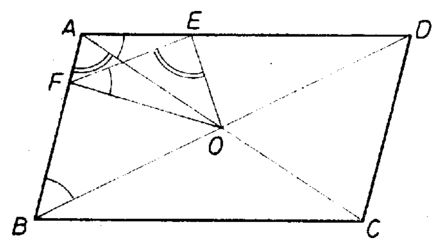
Az $EFGH$ paralelogramma akkor van az adott $ABCD$ paralelogrammába írva, ha az E, F, G, H pontok mindegyike az $ABCD$ paralelogramma valamelyik oldalán van. Két esetet kell megkülönböztetnünk attól függően, hogy a beírt paralelogramma minden csúcsa az $ABCD$ paralelogramma különböző oldalain van, illetve, hogy a beírt paralelogrammának vannak olyan csúcsai, amelyek az $ABCD$ paralelogramma ugyanazon oldalán helyezkednek el.



1. ábra

Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor az E, F, G, H pontok az $ABCD$ paralelogramma különböző oldalain helyezkednek el (1. ábra). Megmutatjuk, hogy ekkor a beírt paralelogramma O_1 középpontja egybeesik az adott paralelogramma O középpontjával. Az E pont rajta van az AB oldalon, ezért O_1-re vonatkozó tükörképe, G, rajta van az AB szakasz O_1-re vonatkozó tükörképén, $A'B'$-n. Az $A'B'$ egyenes a tükrözés miatt párhuzamos AB-vel és átmegy G-n, tehát megegyezik a CD egyenessel. Ekkor viszont O_1 egyenlő távolságra van az AB és CD egyenesektől, azaz rajta van AB és CD középpárhuzamosán. Ugyanígy láthatjuk be, hogy O_1 rajta van BC és AD középpárhuzamosán is, tehát O_1 a két középpárhuzamos metszéspontja, vagyis egybeesik O-val.

Egy paralelogrammát egyértelműen meghatároz két szomszédos csúcsa és a középpontja, ezért két paralelogramma pontosan akkor hasonló, ha két szomszédos csúcsuk és a középpontjuk által meghatározott háromszögek hasonlóak. Feladatunkban tehát például az ABO és az EFO háromszögek hasonlóak. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy az ABO és az EFO háromszögek körüljárása megegyező vagy ellentétes.



2. ábra

(1) Ha a két háromszög körüljárása megegyezik (2. ábra), akkor $BAO\sphericalangle = FEO\sphericalangle$, vagyis az A és E pontokból az FO szakasz ugyanakkora szögben látszik; tehát $AFOE$ húrnégyszög. Ekkor viszont $EAO\sphericalangle = EFO\sphericalangle$, a hasonlóság miatt pedig $EFO\sphericalangle = ABO\sphericalangle$, így $EAO\sphericalangle = ABO\sphericalangle$. De $EAO\sphericalangle = (180° - CBA\sphericalangle) - BAO\sphericalangle$, $ABO\sphericalangle = 180° - AOB\sphericalangle - BAO\sphericalangle$. Tehát, ha a két háromszög körüljárása megegyezik, akkor $AOB\sphericalangle = CBA\sphericalangle$, azaz a paralelogramma átlóinak szöge megegyezik két oldalának szögével. Egyező körüljárású paralelogrammát ezért csak az ilyen tulajdonságú paralelogrammába lehet írni. Ha viszont ez a feltétel teljesül, akkor végtelen sok paralelogrammát lehet az $ABCD$ paralelogrammába írni. Vegyünk fel egy, az A és O pontokon átmenő kört, amelyik metszi az AD és az AB szakaszt is; legyen a két metszéspont E' és F'. Ekkor $AF'OE'$ húrnégyszög, tehát

$$BAO\sphericalangle = F'AO\sphericalangle = F'E'O\sphericalangle$$

és

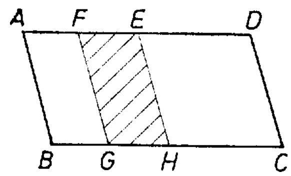
$$OBA\sphericalangle = 180° - BAO\sphericalangle - AOB\sphericalangle = 180° - ACD\sphericalangle - CDA\sphericalangle = OAE'\sphericalangle = OF'E'\sphericalangle;$$

tehát az OAB és $OE'F'$ háromszögek szögei megegyeznek, azaz a két háromszög hasonló. Ez éppen azt jelenti, hogy az E' és F' pontok, valamint ezeknek O-ra vonatkozó tükörképei az $ABCD$ paralelogrammához hasonló paralelogrammát határoznak meg.

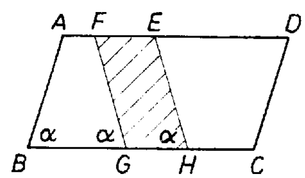
(2) Ha a két háromszög ellentétes körüljárású (1. ábra), akkor $\dfrac{AO}{BO}=\dfrac{EO}{FO}$ és $AOB\sphericalangle=FOE\sphericalangle$; tehát az E pontból az F pontot O körüli $BOA\sphericalangle$ szögű és $\dfrac{BO}{AO}$ arányú forgatva nyújtással kaphatjuk meg. Mivel az E pont rajta van az AB oldalon, ezért a fenti forgatva nyújtásnál keletkező képe rajta van az AB oldalnak a forgatva nyújtásnál keletkező A_1B_1 képén. Viszont E képe F, rajta van az AD oldalon is, ezért F csak AD és A_1B_1 metszéspontja lehet. Ezek alapján a szerkesztés könnyen elvégezhető.

(3) Meg kell még vizsgálnunk azokat az eseteket, amikor a beírt paralelogrammának vannak olyan csúcsai, amelyek az $ABCD$ paralelogramma ugyanazon oldalán helyezkednek el. Legyen pl. E és F az AD oldalon. Ekkor GH és EF párhuzamossága miatt G és H csak a paralelogramma BC oldalán lehet. A szögek megegyezése miatt csak a 3. és a 4. ábrán látható esetek képzelhetők el. Mindkét esetben $AB=FG$, míg EF hosszát a hasonlóság határozza meg;

$$EF=FG\cdot\frac{AB}{CB}=\frac{AB^2}{CB}.$$



3. ábra



4. ábra

A szerkesztést mindkét esetben úgy végezhetjük el, hogy negyedik arányos szerkesztésével megszerkesztjük EF-et, ezt tetszőlegesen felmérjük az AD oldalra, majd pedig a 3., ill. 4. ábrákon látható szögegyenlőséget felhasználva kijelöljük a G és H pontokat.

Összefoglalva; Olyan típusú beírt paralelogramma, amelynek minden csúcsa az eredeti paralelogramma különböző oldalain van, végtelen sok létezik, ha az eredeti paralelogramma egyik szöge megegyezik átlóinak szögével, és egy – vagy egy sem – létezik, ha ez a szögegyenlőség nem áll fenn. (Nyilván nem létezik megoldás, ha az A_1B_1 és AD szakaszoknak nincs közös belső pontja.) A 3. ábrán látható megoldásfajtából végtelen sok létezik, ha a paralelogramma oldalai különbözőek, rombuszok esetén pedig nincs ilyen típusú megoldás. A 4. ábrán látható megoldások pedig akkor léteznek, ha (az ábra jelöléseit használva) $2AB\cos\alpha+GH\leqq BC$; tehát

$$\frac{CB}{AB}\geq 2\cos\alpha+\frac{AB}{CB},$$

azaz

$$\frac{CB}{AB}\geq\cos\alpha+\sqrt{1+\cos^2\alpha}.$$

Megjegyzés. Könnyen belátható, hogy (2)-típusú megoldás csak akkor nincs, ha a paralelogramma téglalap (és nem négyzet). Ekkor ugyanis a leírt szerkesztéssel az eredeti négyszöget kapjuk vissza, amit természetesen nem tekintünk megoldásnak. Négyzetre az (1) és (2) pontokban tárgyalt (végtelen sok) megoldás egybeesik.