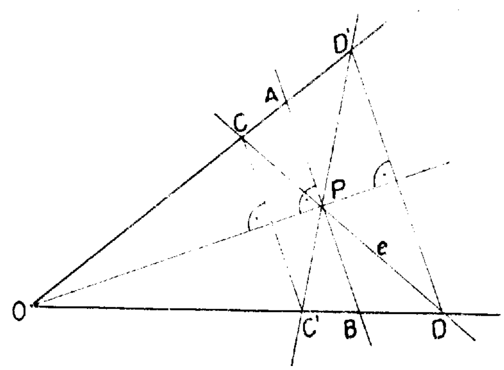
I. megoldás. Azt mutatjuk meg, hogy a P ponton átmenő, a szög szárait metsző tetszőleges egyenes által a szárakból levágott szakaszok reciprokainak összege megegyezik a P-ben a szög felezőjére állított merőleges által a szögszárakból lemetszett két – egyenlő hosszú – szakasz reciprokának összegével. (Ebből feladatunk állítása nyilván következik.)

Jelöljük a szög csúcsát O-val, P-ben a szögfelezőre állított merőleges és a szögszárak metszéspontját A-val, illetve B-vel, a P-n átmenő tetszőleges e egyenesnek a szárakkal való metszéspontját C-vel, illetve D-vel, végül az e egyenes szögfelezőre vonatkozó tükörképének a szárakkal való metszéspontját C'-vel, illetve D'-vel (1. ábra).



1. ábra

Ekkor a bizonyítandó állítás a következő:

$$\frac{1}{OC}+\frac{1}{OD}=\frac{2}{OA}. \tag{1}$$

A CC', AB, DD' egyenesek párhuzamosak, mivel a tükrözés miatt mindegyikük merőleges a szögfelezőre. Ezért az OCC', OAB és ODD' háromszögek hasonlóak, így megfelelő oldalaik aránya megegyezik:

$$\frac{CC'}{OC}=\frac{AB}{OA}=\frac{DD'}{OD}.$$

Ebből $\frac{1}{OA}$ és $\frac{1}{OD}$ értékét kifejezve, majd (1)-be helyettesítve:

$$\frac{1}{OC}+\frac{1}{OC}\cdot\frac{CC'}{DD'}=\frac{2}{OC}\cdot\frac{CC'}{AB};$$

rendezve:

$$CC'-\frac{DD'}{CC'+DD'}=\frac{AB}{2}. \tag{2}$$

A $CC'P$ és $DD'P$ háromszögek is hasonlók, mert megfelelő szögeik egyenlők; ezért:

$$\frac{CC'+DD'}{DD'}=\frac{CC'}{DD'}+1=\frac{CP}{PD}+1=\frac{CP+PD}{PD}=\frac{CD}{PD},$$

azaz

$$\frac{DD'}{CC'+DD'}=\frac{PD}{CD}.$$

Ezt írjuk be (2)-be:

$$CC'\cdot\frac{PD}{CD}=\frac{AB}{2},$$

vagyis $AB=2PB$ miatt:

$$\frac{CC'}{CD}=\frac{PB}{PD}. \tag{3}$$

Ez valóban igaz, hiszen a $CC'D$ és a PBD háromszögek is párhuzamosan hasonlóak, következésképpen megfelelő oldalaik aránya megegyezik. Mivel átalakításaink megfordíthatók, azért (3) teljesülése azt jelenti, hogy a bizonyítandó (1) állítás is igaz.

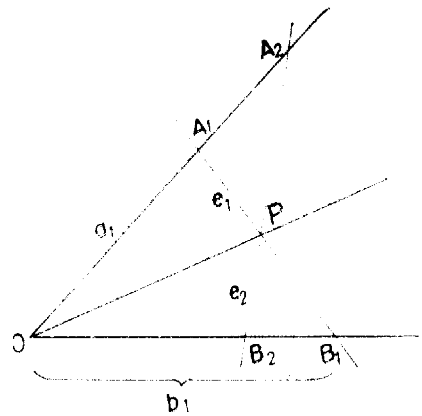
II. megoldás. Ismert, hogy egy háromszög c oldalához tartozó szögfelezőjének: hossza (a szokásos jelöléseket alkalmazva)

$$f_c=\frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}.$$

Ekkor – a 2. ábra jelöléseivel – az OP szakasz az OA_1B_1 és az OA_2B_2 háromszögben egyaránt szögfelező, tehát

$$OP = \frac{2a_1b_1 \cdot \cos\dfrac{\gamma}{2}}{a_1+b_1} = \frac{2a_2b_2\cos\dfrac{\gamma}{2}}{a_2+b_2}.$$

A második egyenlőség mindkét oldalát eloszthatjuk $2 \cdot \cos\dfrac{y}{2}$-vel; ezután rendezéssel a kívánt összefüggéshez juthatunk.



2. ábra

Megjegyzés. Az első megoldás második részében lényegében azt az ismert összefüggést bizonyítottuk be, hogy egy trapéz átlóinak metszéspontján átmenő, az alapokkal párhuzamos egyenesnek a trapéz belsejébe eső szakasza éppen a két alap harmonikus közepe.