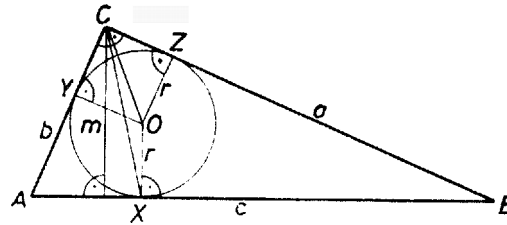


**I. megoldás.** Legyen az  $ABC$  derékszögű háromszög beírt körének középpontja  $O$ , a beírt körnek az oldalakon levő érintési pontjai pedig  $X$ ,  $Y$  és  $Z$  (1. ábra).



1. ábra

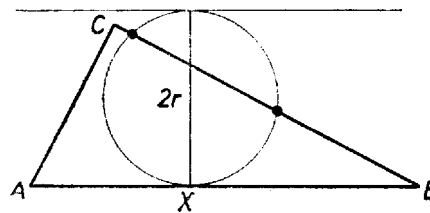
Ekkor a  $CYOZ$  négyszögben  $OY = OZ = r$ , továbbá  $\angle YCZ = \angle CZO = \angle CYO = 90^\circ$  (a két utóbbi szög a kör érintőjének az érintési pontba húzott sugárral bezárt szöge), tehát a  $CYOZ$  négyszög négyzet. Ezért  $CO = r\sqrt{2}$ . A  $CX$  távolság legalább akkora, mint az  $ABC$  háromszög  $C$  csúcsához tartozó magassága, azaz  $m$ . Másrészt a  $COX$  (esetleg elfajuló) háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség szerint:

$$m \leq CX \leq CO + OX = r\sqrt{2} + r.$$

Ezt rendezve :

$$\frac{r}{m} \geq \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1 > 0,4.$$

Ezzel a bizonyítandó állítás egyik felét beláttuk.



2. ábra

Tegyük fel, hogy van olyan háromszög, amelyben – a bizonyítandó állítás második felével ellentétben –  $r \geq 0,5m$ . Tekintsük a beírt körnek az  $AB$  oldallal párhuzamos másik érintőjét. Feltevésünk szerint a  $C$  csúcs az érintőegyenes és az  $AB$  oldal közti sávban helyezkedik el (2. ábra). Feltehetjük, hogy a  $C$  pont az  $AB$  szakaszra  $X$ -ben emelt merőlegesnek például a  $B$ -t nem tartalmazó oldalán van. Ekkor viszont a  $CB$  szakasz nem érintheti a beírt kört, ami ellentmondás. Tehát hibás az eredeti feltevésünk, vagyis  $\frac{r}{m} < 0,5$ . (A bizonyítás második felében nem használtuk ki,

hogy a  $C$  csúcsnál derékszög van, tehát tetszőleges háromszög tetszőleges magasságára igaz, hogy  $\frac{r}{m} < 0,5$ .)

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

**II. megoldás.** Az  $\frac{r}{m}$  hányados értékét kifejezhetjük a háromszög oldalaival. Írjuk fel az  $ABC$  háromszög területét kétféleképpen – az 1. ábra jelöléseit használva – egyrészt úgy, mint az  $AOB$ ,  $BOC$  és  $COA$  háromszögek területének összege, másrészt mint az  $AB$  oldal és a hozzá tartozó magasság szorzatának fele:

$$T = \frac{1}{2}c \cdot r + \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r = \frac{1}{2} \cdot c \cdot m;$$

ebből

$$\frac{r}{m} = \frac{c}{a + b + c}.$$

Így a feladatot visszavezettük a derékszögű háromszög oldalaira vonatkozó egyenlőtlenségekre. Először azt mutatjuk meg, hogy  $\frac{c}{a + b + c} < 0,5$ . Ezt rendezve:  $c < 0,5(a + b + c)$ , azaz  $0,5c < 0,5(a + b)$ , ami valóban igaz a háromszög-egyenlőtlenség miatt. (Most sem használtuk ki, hogy az  $ABC$  háromszög derékszögű.)

A másik egyenlőtlenség helyett ezúttal is az erősebb  $\sqrt{2} - 1 \leq \frac{c}{a + b + c}$  egyenlőtlenséget bizonyítjuk. Azt kell megmutatnunk, hogy:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + 1} \leq \frac{c}{a + b + c} = \frac{1}{\frac{a + b}{c} + 1}.$$

Mivel pozitív számokról van szó, ezért ez ekvivalens a következővel:

$$\frac{a+b}{c} + 1 \leq \sqrt{2} + 1, \quad \text{azaz} \quad a+b \leq c \cdot \sqrt{2}.$$

Emeljük itt mindkét oldalt négyzetre (ez is ekvivalens átalakítás, hiszen a szóban forgó számok pozitívak). Pitagorasztételét alkalmazva:

$$(a+b)^2 \leq 2c^2 = 2a^2 + 2b^2,$$

azaz

$$0 \leq a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2.$$

Ez valóban teljesül, s mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért a bizonyítandó egyenlőtlenség is igaz.

*Balogh József* (Szeged, JATE Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o. t.)  
megoldása alapján

*Megjegyzés.* Belátható, hogy az  $\frac{r}{m}$  hányados értéke 0,5-et tetszőlegesen megközelítheti, de soha nem éri el. Alulról viszont felveszi a  $\sqrt{2} - 1$  értéket, ha a derékszögű háromszög egyenlő szárú.