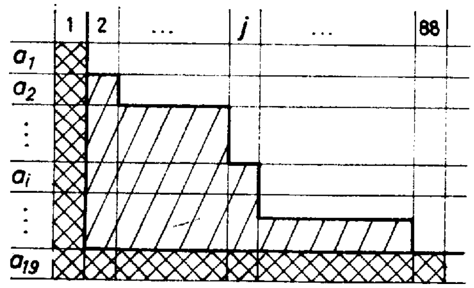
I. megoldás. Megmutatjuk, hogy a kérdéses összeg minden szóba jövő $\{a_n\}$ sorozatra ugyanakkora. Először is jegyezzük meg, hogy $a_{19}=88$ miatt a $b_1, b_2, \ldots, b_{88}$ értékek léteznek és mindegyikük – természetesen – legfeljebb 19.



Készítsük el az ábrán látható 19×88-as táblázatot. A táblázat i-edik sorának j-edik mezőjét fessük feketére, ha $j \le a_i$, egyébként ez a mező maradjon fehér.

Az i-edik sorban ekkor nyilván a_i darab fekete mező van, a táblázatban tehát összesen

$$a_1+a_2+\ldots+a_{19}$$

mezőt festettünk feketére.

A fehér mezőket oszloponként számoljuk össze. A j-edik oszlopban a j-nél kisebb a_i-k soraiban álló mezők maradtak fehéren; ezek száma pontosan annyi, ahány j-nél kisebb eleme van az a_n sorozatnak, azaz $\{b_n\}$ értelmezése szerint – éppen b_j-1 darab. Fehér mező tehát összesen

$$(b_1-1)+(b_2-1)+\ldots+(b_{88}-1)$$

maradt a táblázatban.

A 19×88 mező mindegyike vagy fekete, vagy fehér, így a vizsgált összeg értéke

$$19\cdot 88+88=1760$$

minden olyan monoton a_n sorozatra, melyre $a_{19}=88$.

II. megoldás. A $\{b_n\}$ sorozat értelmezése miatt az $\{a_n\}$ sorozatnak b_m-1 darab m-nél kisebb eleme van, így $(b_{m+1}-1)-(b_m-1)=b_{m+1}-b_m$ olyan eleme, ami éppen m.

A feltétel szerint $a_{19}=88$, ezért a 88 nyilván $(20-b_{88})$-szor fordul elő. Ez azt jelenti, hogy

$$\begin{gathered}a_1+a_2+\ldots+a_{19}=\\ =(b_2-b_1)\cdot 1+(b_3-b_2)\cdot 2+\ldots+(b_{88}-b_{87})\cdot 87+(20-b_{88})\cdot 88=\\ =20\cdot 88-(b_1+b_2+\ldots+b_{88}),\ \text{és így}\ a_1+a_2+\ldots+a_{19}+b_1+b_2+\ldots+b_{88}=\\ =20\cdot 88=1760.\end{gathered}$$