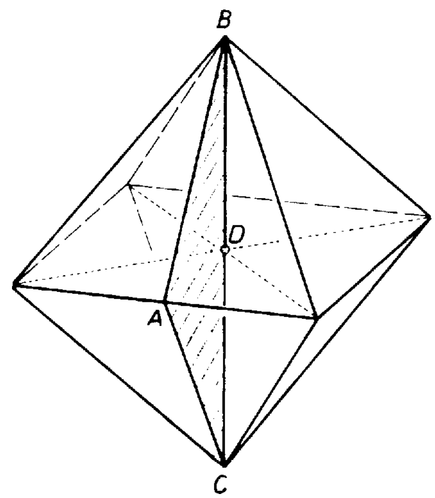
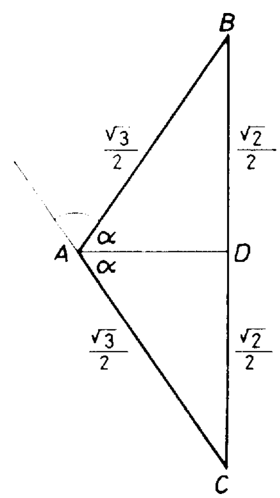
I. megoldás. Megmutatjuk, hogy az oktaéder lapjaira állított gúlák egységnyi élű szabályos tetraéderek. Az oktaéder szimmetriája miatt a gúlák oldallapjai egybevágó egyenlő szárú háromszögek. Ezek akkor alkotnak szabályos tetraédert, ha az alaplappal bezárt szögük megegyezik a szabályos tetraéder lapszögével. A konstrukcióból következően az oldallapoknak az alaplappal bezárt szöge éppen 180°-ra egészíti ki a szabályos oktaéder lapszögét. Azt kell tehát igazolnunk, hogy a szabályos tetraéder és a szabályos oktaéder lapszögének összege 180°.

Számítsuk ki először a szabályos oktaéder lapszögét. Ezt a szöget az oktaéder egyik élének felezőpontja és a két szemközti csúcs által meghatározott egyenlő szárú háromszöget felhasználva tehetjük meg (1. és 2. ábra). Legyen a keresett szög 2α.



1. ábra



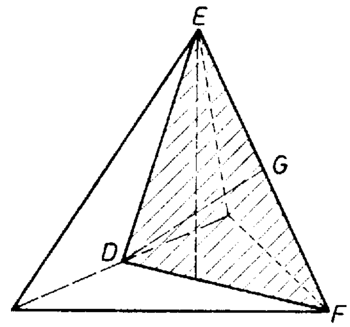
2. ábra

Az ABD háromszögből:

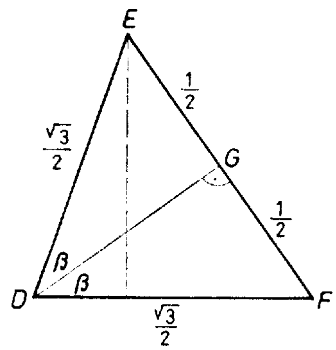
$$\sin\alpha = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

A szabályos tetraéder lapszögét a 3. és 4. ábra alapján határozhatjuk meg (E és F két csúcs, G az EF, D pedig az EF-fel szemközti él felezőpontja).



3. ábra



4. ábra

A keresett 2β szög szögfüggvényeinek értékét a DEG háromszögből számíthatjuk ki:

$$\sin\beta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos\beta = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Mivel $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$ és $2\alpha \neq 2\beta$, ezért a lapszögek valóban 180°-ra egészítik ki egymást, tehát a gúlák szabályos tetraéderek.

A test ily módon egy szabályos okatéderből és a lapjaira illesztett 8 db szabályos tetraéderből áll. Térfogata ezen testek térfogatának összege, azaz:

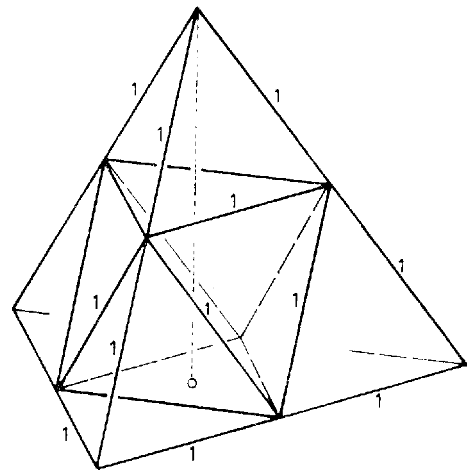
$$V = V_{\text{okt.}} + 8 \cdot V_{\text{tetr.}} = \frac{\sqrt{2}}{3} + 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = \sqrt{2},$$

a felszíne pedig megegyezik 24 db egységnyi oldalú szabályos háromszög területével:

$$A = 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}.$$

Németh Sándor (Győr, Révai M. Gimn., I. o. t.)
dolgozata alapján

II. megoldás. A feladatot trigonometria használata nélkül is megoldhatjuk.



5. ábra

Tekintsünk egy 2 egység oldalú szabályos tetraédert (5. ábra). Ennek élfelező pontjai egy egységnyi élű szabályos oktaédert határoznak meg. A feladatban éppen erre az oktaéderre „építjük vissza" az őt négyesével szabályos 2 egység oldalú tetraéderré kiegészítő gúlákat, amiknek így szabályos tetraédereknek kell lenniük. (Az oktaéderre összesen két „nagy" tetraédert építünk.)

A további számolás már ugyanúgy végezhető el, mint az I. megoldásban.

Weisz Csaba (Kaposvár, Táncsics M. Gimn., II. o. t.)