Megállapíthatjuk, hogy a feladat x-re és y-ra nézve szimmetrikus. Ha $x = 1$, akkor $x^{y^x} = 1$ és $y^{x^y} = y$, így valóban $x = y$. A továbbiakban tehát feltehetjük, hogy $x > 1$ és $y > 1$.

A közismert, egyszerűbb $4^2 = 2^4$ tény feladatunkban nem utánozható. Arra mégis rávilágít, hogy a számelmélet alaptétele szerint x és y prímfelbontásában ugyanazok a prímszámok lépnek fel, csak kitevőikben különbözhetnek.

Ha p tetszőleges prímszám, n pedig pozitív egész, akkor jelölje $p(n)$ a p kitevőjét az n prímtényezős felbontásában. A számelmélet alaptétele szerint a feladatban szereplő x és y bármely p prímszámra kielégíti az

$$y^x \cdot p(x) = p(x^{y^x}) = p(y^{x^y}) = x^y \cdot p(y) \tag{1}$$

összefüggést.

Ha valamilyen p_1 prímre

$$p_1(x) = 0 \neq p_1(y),$$

akkor (1) szerint $x^y \cdot p_1(y) = 0$, ami lehetetlen, hiszen x^y és $p_1(y)$ egyaránt pozitív.

Tegyük fel, hogy van olyan p_2 prímszám, amelyre

$$p_2(x) > p_2(y) > 0;$$

ekkor (1)-ből kapjuk, hogy

$$y^x < x^y, \tag{2}$$

így minden p prímre vagy $p(x) = p(y) = 0$, vagy pedig $p(x) > p(y) > 0$ teljesül, azaz x (valódi) többszöröse y-nak. Legyen $x = ky$, $y \geqq 2$, $k \geqq 2$; megmutatjuk, hogy $x \leqq y^k$. Ebből a célból tetszőleges K, Y természetes számokra a k-ra vonatkozó indukcióval igazoljuk, hogy ha $k \geqq 2$ és $y \geqq 2$, akkor $ky \leqq y^k$. $k = 2$-re ez valóban igaz, mivel $y^2 - 2y = y(y-2) \geqq 0$. Tegyük fel, hogy valamilyen $k \geqq 2$-re $ky \leqq y^k$; ekkor

$$(k+1)y = ky + y \leqq y^k + y \leqq y^k + y^k = 2y^k \leqq y^{k+1},$$

tehát az állítás $(k+1)$-re is igaz.

Az így bizonyított egyenlőtlenség felhasználásával (2) jobb oldala a következőképpen becsülhető:

$$x^y = (ky)^y \leqq (y^k)^y = y^{ky} = y^x; \tag{3}$$

ez ellentmond (2)-nek, tehát nem létezik olyan p_2 prím, melyre $p_2(x) > p_2(y) >$
> 0.

A kizárt esetek hiányában így bármely p prímszámra $p(x) = p(y)$, ezért a számelmélet alaptétele értelmében $x = y$.

Megjegyzés. Felhasználva azt az analízisből ismert tényt, hogy ha $\alpha \leqq 0$, akkor az $\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$ sorozat szigorúan monoton növően tart az e^α számhoz, kapjuk, hogy ha $\alpha > 0$, akkor

$$\left(1 + \frac{\alpha}{m}\right)^m < e^\alpha < 3^\alpha \tag{4}$$

minden pozitív egész n-re.

Ha most x és y 2-nél nagyobbak és $x < y$, akkor (4) szerint

$$\left(\frac{y}{x}\right)^x = \left(1 + \frac{y-x}{x}\right)^x < 3^{y-x} \leqq x^{y-x}, \text{ azaz } y^x < x^y,$$

és így $x^{y^x} < y^{x^y}$ is igaz, vagyis $x, y > 2$ esetén csak akkor teljesül a feltétel, ha $x = y$.

Ha x vagy $y = 1$, akkor nyilván $x = y$.

Meg kell még vizsgálnunk, lehetséges-e megoldás, ha például $x = 2$ és $y \geqq 3$, azaz fennállhat-e

$$2^{y^2} = y^{2^y}, \quad y \geqq 3. \tag{5}$$

A megoldásban is szereplő indukciós bizonyításhoz hasonló módon igazolható, hogy ha $y \geqq 5$, akkor $2^y > y^2$. Marad $y = 3$ vagy $y = 4$. akkor pedig behelyettesítéssel győződhetünk meg arról, hogy (5) bal oldala kisebb, mint a jobb oldal.