I. megoldás. Legyen a megadott pont P és rajzoljuk meg a téglalap BD átlóját. Ez két egybevágó derékszögű háromszögre bontja a téglalapot, a kettő közül tekintsük azt, amelyik – esetleg a határán – tartalmazza a P pontot (1. ábra).

1988-12-452-1.eps

1. ábra

Nagyítsuk úgy az A csúcsú résztéglalapot az A-ból, hogy P rákerüljön a BD oldalra. Azt állítjuk, hogy az AP^* átlójú téglalap területe legfeljebb az ABD háromszög területének a fele; ebből következik, hogy a P csúcsú résztéglalap területe sem nagyobb 1/4-nél.

Ez az állítás sokféleképpen igazolható. A P^*-ból induló oldalak két egymáshoz és ABD-hez hasonló derékszögű háromszöget vágnak le az ABD háromszögből. A $P^*D=p,\ \ P^*B=q$ jelöléssel a levágott háromszögek területének összege

$$\left(\frac{p}{p+q}\right)^2\cdot t_{ABD}+\left(\frac{q}{p+q}\right)^2\cdot t_{ABD}.$$

Ez az összeg pedig legalább $\dfrac{t_{ABD}}{2}$, hiszen a négyzetes és a számtani közép közti egyenlőség szerint

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{p}{p+q}\right)^2+\left(\frac{q}{p+q}\right)^2}{2}}\geqq\frac{\frac{p}{p+q}+\frac{q}{p+q}}{2}=\frac{1}{2}.$$

Könnyen látható, hogy pontosan akkor áll fenn egyenlőség, ha $P=P^*$ a DB átfogó felezőpontja.

Mucsi Zsuzsanna (Békéscsaba, Sebes Gy. Közg. Szki., II. o. t.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. A felhasznált segédtétel következő állítása is igaz: ha egy háromszög a belsejében tartalmaz egy paralelogrammát, akkor a paralelogramma területe nem nagyobb a háromszög területének a felénél.

II. megoldás. A téglalap O középpontján átmenő, a téglalap oldalaival párhuzamos egyenesek négy egybevágó téglalapra osztják az $ABCD$ téglalapot. Ha a P pontot az A vagy a C csúcsú résztéglalapban vesszük fel, akkor az állítás nyilván igaz, hiszen ekkor valamelyik P csúcsú résztéglalapot tartalmazza egy 1/4 területű téglalap.

1988-12-453-1.eps

2. ábra

Ha nem ez a helyzet, akkor tekintsük P-nek az O-ra vonatkozó P' tükörképét (2. ábra). A csúcsoknál négy kis egybevágó téglalap keletkezik, és így az A és a C csúcsú résztéglalapok két-két példánya éppen lefedi azt a „keresztet", amely úgy jön létre, hogy az $ABCD$ téglalapból kivágjuk a vele közös centrumú, PP' átlójú téglalapot. Így a két terület kétszeresének összege kisebb, mint az $ABCD$ téglalap területe, legalább az egyikük tehát 1/4-nél kisebb területű.

Megjegyzések: 1. Mindkét megoldásból kiderül, hogy a két szóban forgó terület csak úgy lehet 1/4, ha a P pontot a téglalap középpontjában vesszük fel.

2. Nem igaz, hogy a két terület között van olyan is, amelyik legalább 1/4; mindkét terület lehet 1/4-nél kisebb. Ez pontosan akkor teljesül, ha a P pont a 3. ábrán bevonalkázott tartomány belsejében van. Ezt a tartományt két egybevágó hiperbolaív határolja, melyek a téglalap középpontjában érintik egymást, aszimptotáik a téglalap A, ill, C csúcsából induló oldalegyenesei, és az oldalakat az A, illetve C csúcsoktól távolabbi negyedelő pontokban metszik. A feladat állítása egyébként e hiperbolák közvetlen vizsgálatával is igazolható.

1988-12-454-1.eps

3. ábra