Legyenek a háromszög M magasságpontjának, ill. az ezen átmenő tetszőleges e egyenesnek a háromszög BC, AC, AB oldalegyeneseire vonatkozó tükörképei rendre M_1, M_2, M_3, ill. e_1, e_2, e_3. Ismeretes, hogy az M_1, M_2, M_3 pontok a háromszög köré írt körön helyezkednek el. A kör és e metszéspontjait F-fel és G-vel, e_1 és e_2 metszéspontját pedig P-vel jelöljük (1. ábra); a tükrözések miatt ekkor

$$PM_1A\sphericalangle = FMM_1\sphericalangle = GMA\sphericalangle = PM_2A\sphericalangle.$$

1988-12-450-1.eps

1. ábra

A kerületi szögek tétele szerint így P a háromszög köré írt körön van, és ugyanez mondható el e_1 és e_3 Q metszéspontjáról is. Az e_1 egyenesnek és a háromszög köré írt körnek azonban legfeljebb két közös pontja lehet, ezért a P, Q, M_1 pontok közül valamelyik kettő egybeesik. Ha $P \neq M_1$ és $Q \neq M_1$, akkor nyilván $P = Q$, és ez e_1-nek, e_2-nek és e_3-nak is pontja.

1988-12-451-1.eps

2. ábra

Tegyük fel ezután, hogy pl. $P = M_1$, azaz $e_2 = M_1M_2$. Megmutatjuk, hogy ekkor e_3 is átmegy az $M_1 = P$ ponton, vagyis $e_3 = M_3M_1$. Mivel M_3 illeszkedik e_3-ra, ezért (a 2. ábrán látható elrendezés alapján) elegendő belátni, hogy e_3 ugyanakkora szöget zár be e_2-vel, mint M_3M_1. Ha e_2-t AC-re tükrözzük, megkapjuk az e egyenest, ennek AB-re tükrözésével pedig e_3-hoz jutunk. Az e_2 egyenes tehát A körüli $2\,\alpha$-szögű forgatással vihető e_3-ba, így – e_2 és e_3 metszéspontját R-rel jelölve –

$$M_3RM_2\sphericalangle = 180^\circ - 2\,\alpha,$$

a kerületi szögek tétele alapján pedig

$$M_3M_1M_2\sphericalangle = M_3BM_2\sphericalangle = 2\cdot ABM_2\sphericalangle = 2(90^\circ - \alpha) = 180^\circ - 2\,\alpha.$$

Ezzel megmutatjuk, hogy $R = M_1$, így $e_3 = M_3M_1$, következésképpen M az e_1, e_2, e_3 egyenesek mindegyikére illeszkedik.

Megjegyzés. A megoldás során hallgatólagosan feltételeztük, hogy a háromszög hegyesszögű. Lényegében ugyanígy végezhető el a bizonyítás derékszögű és tompaszögű háromszögre is.