I. megoldás. Legyenek az ötszög csúcsai A, B, C, D, E, és tegyük fel, hogy $AB||CE$, $BC||DA$, $CD||BE$ és $DE||CA$. Ekkor azt kell megmutatnunk, hogy $EA||DB$.

1988-11-385-1.eps

Mivel AB párhuzamos CE-vel, ezért ABE és ABC háromszögek AB oldalhoz tartozó magasságai egyenlőek, így e két háromszögnek a területe is egyenlő. Ugyanígy látható be az is, hogy az ABC háromszög területe megegyezik a BCD háromszög területével, BCD területe megegyezik CDE területével, a CDE háromszög területe pedig megegyezik a DEA háromszög területével. Ebből következik, hogy az ABE és a DEA háromszögek területe is egyenlő. Mivel a két háromszög AE oldala közös, ezért az ehhez tartozó magasságaik is egyenlők, vagyis a B és D pontok egyenlő távolságra vannak az AE egyenestől.

Ötszögünk konvex, így B és D az AE-nek ugyanazon az oldalán helyezkedik el; tehát a BD egyenes párhuzamos az AE egyenessel.

II. megoldás. A vektorok vektoriális szorzatát használva is megoldhatjuk a feladatot. Jelöljük az ötszög csúcsait ugyanúgy, mint az I. megoldásban. Legyen továbbá

$$\overrightarrow{AB}=\mathbf{a},\ \overrightarrow{BC}=\mathbf{b},\ \overrightarrow{CD}=\mathbf{c},\ \overrightarrow{DE}=\mathbf{d},\ \overrightarrow{EA}=\mathbf{e}.$$

Ekkor a négy feltétel éppen azt jelenti, hogy

$$\begin{gathered}\mathbf{a}\times(\mathbf{c}+\mathbf{d})=0,\\ \mathbf{b}\times(\mathbf{d}+\mathbf{e})=0,\\ \mathbf{c}\times(\mathbf{e}+\mathbf{a})=0,\\ \mathbf{d}\times(\mathbf{a}+\mathbf{b})=0.\end{gathered}$$

Adjuk össze ezt a négy egyenlőséget, és rendezzük a bal oldalt

$$\begin{gathered}\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{a}\times\mathbf{d}+\mathbf{b}\times\mathbf{d}+\mathbf{b}\times\mathbf{e}+\mathbf{c}\times\mathbf{e}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{d}\times\mathbf{a}+\mathbf{d}\times\mathbf{b}=\\ =(\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})+(\mathbf{a}\times\mathbf{d}+\mathbf{d}\times\mathbf{a})+(\mathbf{b}\times\mathbf{d}+\mathbf{d}\times\mathbf{b})+\mathbf{b}\times\mathbf{e}+\mathbf{c}\times\mathbf{e}=\\ =(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{e}=0.\end{gathered}$$

Ez viszont pontosan akkor teljesül, ha a BD és az EA szakaszok párhuzamosak.

Megjegyzés. Több megoldó azt próbálta bizonyítani, hogy a feltételeket kielégítő ötszög szabályos, vagy legalábbis szimmetrikus. Ez azonban nem igaz. A feltételeket kielégítő ötszögek az ún. „affin szabályos” sokszögek közé tartoznak, ami azt jelenti, hogy oldalaik és szögeik nem feltétlenül egyenlőek, de mindazok az oldalaik és átlóik párhuzamosak, amely oldalak és átlók a megfelelő oldalszámú szabályos sokszögben párhuzamosak. (Az affin szabályos négyszögeknek így két-két szemközti oldaluk párhuzamos – mivel a négyzet oldalai és átlói közül csak a szemközti oldalak párhuzamosak – ezek tehát éppen a paralelogrammák.) Belátható, hogy egy affin szabályos ötszögnek két oldalát és az azok által bezárt szögét szabadon megválaszthatjuk.