

A feladat azt kérdezi, hogy hány valódi hatvány található az  $[1, 10^6]$  intervallumban. Mivel  $2^{20} > 10^6 > 2^{19}$ , ezért egyetlen hatványkitevő sem lehet 19-nél nagyobb. Elegendő csupán a prímszám kitevőjű hatványokat összeszámolni, hiszen tetszőleges  $y = u \cdot v$  összetett számra  $x^y$  előáll  $(x^u)^v$  alakban.

Bármilyen  $p$  kitevőhöz  $h(p) = \lfloor \sqrt[p]{10^6} \rfloor - 1$  darab  $p$ -edik hatvány esik az  $[1, 10^6]$  intervallumba. (Az 1-et azért vontuk le, mert az  $1^p = 1$  megoldás nem elégíti ki a feladat feltételét.) A  $h(p)$  megfelelő értékeit az alábbi táblázat tartalmazza:

p	2	3	5	7	11	13	17	19
h(p)	999	99	14	6	2	1	1	1

Ez összesen 1123 darab számot jelent, ám vegyük észre, hogy bizonyos hatványokat – ilyen például  $64 = 8^2 = 4^3$  – még így is többször számoltunk. Egy hatványt pontosan akkor számoltunk többször, ha az előáll  $x_1^{p_1}$  és  $x_2^{p_2}$  alakban is, ahol  $p_1$  és  $p_2$  két különböző prímszám. Ha  $p(m)$ -mel jelöljük egy  $p$  prímszám kitevőjét az  $m$  prímtényező felbontásában, akkor  $x_1^{p_1} = x_2^{p_2}$  esetén  $p_1 \cdot p(x_1) = p_2 \cdot p(x_2)$ , minden  $p$  prímre. Mivel  $p_1 \neq p_2$ , ezért  $p(x_2)$  osztható  $p_1$ -gyel,  $p(x_1)$  pedig  $p_2$ -vel, vagyis  $x_1 = x^{p_2}$  és  $x_2 = x^{p_1}$ , valamilyen  $x$  egészre. A fenti számlálás során tehát azokat az  $x^y$  hatványokat számoltuk többször, amelyekben az  $y$  kitevőnek egynél több prímosztója is van; mindegyiküket éppen annyiszor vettük számításba, ahány prímszámmal a kitevő osztható. Azok a 19-nél nem nagyobb összetett számok, amelyeknek egynél több prímosztójuk van, a következők: 6, 10, 12, 14, 15, 18. Mivel ezek mindegyike pontosan két prímmel osztható, ezért az  $x^6, x^{10}, x^{12}, x^{14}, x^{15}, x^{18}$ -alakú hatványokat számoltuk kétszer. Közülük  $x^{12} = (x^2)^6$  és  $x^{18} = (x^3)^6$  lévén, csupán az  $x^6, x^{10}, x^{14}$  és  $x^{15}$  alakúakkal kell foglalkoznunk. Az ilyen hatványok száma az  $[1, 10^6]$  intervallumban rendre 9, 2, 1, 1. A valódi hatványok száma így  $1123 - 13 = 1110$ . Ehhez hozzá kell még vennünk az 1-et is, hiszen pl.  $1 = 2^0$ . Összesen tehát 1111 olyan szám van az  $[1, 10^6]$  intervallumban, amely előállítható a kívánt alakban.