I. megoldás. Mivel $x^2+x=([x^2]+[x])+(\{x^2\}+\{x\})$, ezért ha $\{x^2\}+\{x\}=1$ egész szám, akkor $x^2+x=k$ is egész. Az

$$x^2+x=k$$

egyenletet x-re megoldva,

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4k}}{2}$$

adódik. Ha x racionális, akkor $\sqrt{1+4k}=\pm(2x+1)$ is racionális, így – egész szám négyzetgyöke lévén – egész. Nyilván akkor $\sqrt{1+4k}$ páratlan, $-1\pm\sqrt{1+4k}$ páros, tehát x egész szám; így azonban $\{x^2\}+\{x\}=0$, és ez ellentmondás.

II. megoldás. A feladatot a következő, általánosabb formában bizonyítjuk: Ha n természetes szám, $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1}$ egészek, és x racionális, akkor $\{x^n\}+\{a_{n-1}x^{n-1}\}+\ldots+\{a_1x\}$ (csak) úgy lehet egész szám, ha x maga is egész.

Tegyük fel, hogy a kérdéses összeg egész. Az előző megoldásban alkalmazott gondolatmenettel ekkor azt kapjuk, hogy

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x=a_0 \tag{1}$$

is egész szám. Legyen $x=\frac{p}{q}$, ahol a $\frac{p}{q}$ tört már nem egyszerűsíthető. Írjuk be az (1) egyenletbe $x=\frac{p}{q}$ értékét; mindkét oldalt q^n-nel megszorozva, rendezés után az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$p^n=-(a_{n-1}p^{n-1}q+\ldots+a_1pq^{n-1})+a_0q^n. \tag{2}$$

A (2) egyenlőség jobb oldalán valamennyi összeadandó q-val osztható szám, így p^n is osztható q-val. Mivel p-nek és q-nak nincs 1-nél nagyobb közös osztója, ez csak úgy lehetséges, hogy $q=\pm1$, azaz x egész.