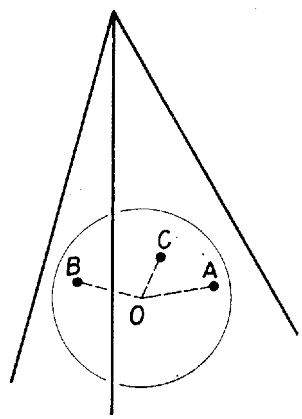
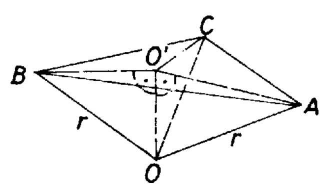
Megoldásunk során felhasználjuk azt a később bizonyítandó lemmát, hogy egy triéder (három egy pontból kiinduló nem egysíkú félegyenes által meghatározott térbeli alakzat) lapszögeinek az összege $180°$-nál nagyobb. Ezek szerint a tetraéder négy csúcsához tartozó négy triéder szögeinek az összege több, mint $4 \cdot 180° = 720°$. A tetraéder minden lapszöge két triéderben (két lap közös élén lévő csúcsokhoz tartozó triéderekben) lép fel, tehát a tetraéder lapszögeinek az összege nagyobb, mint $\dfrac{720°}{2} = 360°$. Ez éppen a bizonyítandó állítás.



1. ábra

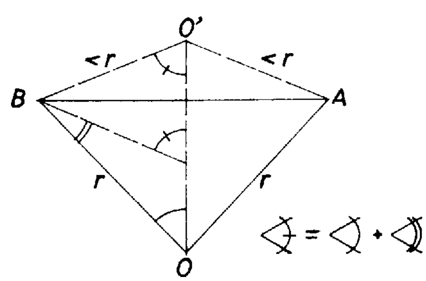
A lemma bizonyítása: Tekintsünk egy olyan gömböt, amely érinti a triéder mindhárom lapját. (Ilyen beírt gömb végtelen sok létezik; ezt lényegében ugyanúgy láthatjuk be, mint azt a tényt, hogy minden tetraédernek van beírt gömbje.) Állítsunk a gömb középpontjából merőlegeseket a triéder lapjaira (1. ábra). Így három olyan szakaszt kapunk, amelyek egyenlő hosszúak, és közülük bármelyik kettő által bezárt szög éppen a megfelelő síkok lapszögének kiegészítő szöge. Vagyis a lapszögek összege pontosan akkor nagyobb $180°$-nál, ha ezen szakaszok közötti szögek összege kisebb, mint $360°$.



2. ábra

Jelöljük O-val a triéderbe írt gömb középpontját, A, B, C-vel pedig az érintési pontokat. Legyen O' az O pont merőleges vetülete az ABC síkon (2. ábra). Ekkor az $OO'A$, $OO'B$ és $OO'C$ háromszögek egybevágóak, mert van egy közös oldaluk, az O'-nél lévő szögük derékszög, továbbá $OA = OB = OC$. Ezért $O'A = O'B = O'C$, vagyis az ABO', BCO' és CAO' háromszögek egyenlő szárúak. Tekintsük például az ABO és ABO' egyenlő szárú háromszögeket. Ezeknek közös az alapjuk, az ABO háromszög szára megegyezik az $OO'A$ derékszögű háromszög átfogójával, s így nagyobb, mint az $O'A$ befogó, ami az $AO'B$ háromszögnek a szára. Ez azt jelenti (l. a 3. ábrát), hogy azABO háromszög szárszöge kisebb, mint az ABO' háromszögé, tehát

$$AOB\sphericalangle < AO'B\sphericalangle.$$



3. ábra

Ugyanígy kapjuk, hogy

$$BOC\sphericalangle < BO'C\sphericalangle,$$
$$COA\sphericalangle < CO'A\sphericalangle.$$

A jobb oldalon álló szögek összege éppen 360°, tehát a bal oldali szögek összege 360°-nál kisebb, és éppen ezt akartuk bizonyítani.