Válasszunk ki a sokszög kerületén egy tetszőleges A pontot. Legyen B az a pont, amely a sokszögvonalon haladva A-tól $1/2$ távolságra van. Jelöljük O-val az AB szakasz felezőpontját (ha $A \equiv B$ – ami hurkolt sokszög esetén fordulhat elő–, akkor legyen $O \equiv A$). Megmutatjuk, hogy az O középpontú, $1/4$ sugarú kör lefedi a sokszöget.

1988-11-380-1.eps

Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, azaz van olyan P pontja a sokszögvonalnak, amely a körön kívülre esik. A háromszög-egyenlőtlenség miatt az AP szakasz legfeljebb akkora, mint a sokszögvonal A és P közötti része, a BP szakasz pedig legfeljebb akkora, mint a sokszögvonal P és B közötti része. Vagyis $AP+BP \leqq 1/2$, mert a sokszögvonal A és B közötti része éppen $1/2$. Legyen a P pont O-ra vonatkozó tükörképe P'. Ekkor a P' pont is a körön kívülre esik, tehát a PP' szakasz nagyobb, mint a kör átmérője.

A tükrözés miatt $P'A = PB$, így:

$$1/2 \geqq PA + PB = PA + P'A \geqq PP' > 1/2.$$

Ellentmondásra jutottunk, tehát hibás a feltevésünk; vagyis a sokszögnek nem lehet pontja a körön kívül.

Stolmár Katalin (Győr, Révai M. Gimn., I. o. t.)
dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A feladat állítása tetszőleges, egységnyi kerületű zárt vonalra is igaz, hiszen a bizonyítás során nem használtuk ki, hogy sokszögről van szó.

2. A bizonyításból az is látható, hogy egy-egy síkidomhoz általában több olyan kör is található, amely lefedi a síkidomot (az A pontot ugyanis tetszőlegesen választottuk a kerületen).