Legyenek a húrnégyszög csúcsai $A$,$B$,$C$,$D$, a téglalapok középpontjai $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$, az $A$-val szomszédos két téglalap-csúcs pedig $P$ és $Q$ ( ábra). Először megmutatjuk, hogy az $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$ négyszög szemközti oldalai egyenlőek (vagyis hogy a négyszög paralelogramma), majd pedig azt, hogy az egyik szög derékszög.

1988-11-379-1.eps

A feladat feltételeiből következik, hogy a húrnégyszög szemközti oldalaira szerkesztett téglalapok egybevágóak; ezért $O_4A = CO_2$ és $AO_1 = CO_3$, továbbá $QAO_1\sphericalangle = O_3CD\sphericalangle$ és $O_4AP\sphericalangle = O_2CB\sphericalangle$. Az $A$ csúcsnál levő teljesszöget – $360°$-ot – a $PAQ\sphericalangle$, a $DAB\sphericalangle$ és két $90°$-os szög alkotja, tehát $PAQ\sphericalangle = 180° - DAB\sphericalangle = DCB\sphericalangle$, hiszen a húrnégyszög szemközti szögeinek összege $180°$. Ekkor viszont

$$O_4AO_1\sphericalangle = O_4AP\sphericalangle + PAQ\sphericalangle + QAO_1\sphericalangle = O_2CB\sphericalangle + BCD\sphericalangle +$$
$$+ DCO_3\sphericalangle = O_2CO_3\sphericalangle.$$

Az $O_4AO_1$ és az $O_2CO_3$ háromszögekben tehát megegyezik két-két oldal és az azok által bezárt szög, ezért a háromszögek egybevágóak, így $O_4O_1 = O_2O_3$. A bizonyítás során hallgatólagosan feltételeztük, hogy a $BCD$ szög hegyesszög, ez azonban nem jelent lényeges megszorítást. A húrnégyszög két szemközti szöge közül ugyanis vagy mindkettő derékszög – és ekkor az $O_4O_1 = O_2O_3$ egyenlőség nyilván teljesül –, vagy pedig az egyik hegyesszög, a másik pedig tompaszög. Ez utóbbi esetben pedig feltehető, hogy a $C$-nél levő szög hegyesszög. Ugyanígy láthatjuk be, hogy $O_1O_2 = O_3O_4$.

A paralelogramma szemközti szögei egyenlők, tehát $O_4O_1O_2\sphericalangle = O_2O_3O_4\sphericalangle$; az egyenlő szögeket felbontva:

$$O_4O_1A\sphericalangle + AO_1B\sphericalangle - BO_1O_2\sphericalangle = CO_3D\sphericalangle - CO_3O_2\sphericalangle + DO_3O_4\sphericalangle.$$

Ismét felhasználtuk, hogy az $ABCD$ húrnégyszögben a $B$ és $C$ csúcsoknál levő szög hegyesszög. Hasonlóan végezhető a bizonyítás azokban az esetekben is, amikor e szögek között derékszög vagy tompaszög is van.

Az egyenlőséget átrendezve:

$$O_4O_1A\sphericalangle + CO_3O_2\sphericalangle + 2 \cdot AO_1B\sphericalangle - BO_1O_2\sphericalangle - DO_3O_4\sphericalangle =$$
$$= CO_3D\sphericalangle + AO_1B\sphericalangle.$$

A bal oldalon éppen az $O_4O_1O_2$ szög kétszerese áll, mivel $O_4O_1A\sphericalangle = CO_3O_2\sphericalangle$ az $O_4O_1A$ és $CO_3O_2$ háromszögek egybevágósága miatt, az $O_4O_3D$ és az $O_2O_1B$ háromszögek egybevágóságából pedig $BO_1O_2\sphericalangle = DO_3O_4\sphericalangle$ következik. A jobb oldalon levő két szög összege $180°$, hiszen $CO_3D\sphericalangle = AO_1Q\sphericalangle$ a szemközti téglalapok egybevágósága miatt. Beláttuk tehát, hogy $O_4O_1O_2 = 90°$, így az $O_1O_2O_3O_4$ négyszög derékszögű paralelogramma, vagyis téglalap.