Két esetet kell megkülönböztetnünk, aszerint, hogy az $ABCD$ négyszög konvex vagy konkáv.

1988-11-377-1.eps

1. ábra

Ha az $ABCD$ négyszög konvex, akkor a $KLMN$ négyszög területét úgy számolhatjuk ki, hogy az $ABCD$ négyszög területéből levonjuk az ALK, DML, CNM és BKN háromszögek területét (1. ábra). A BKN és BAC háromszögek hasonlóak, mert megegyezik két-két oldaluk aránya ($BK : BA = BN : BC = 2 : 3$), az ezen oldalak által bezárt szögük pedig közös. Területük aránya pedig megegyezik a hasonlóság arányának négyzetével, azaz:

(1) $$\frac{T_{BKN}}{T_{BAC}} = \frac{4}{9}.$$

Hasonlóan látható be, hogy

(2) $$\frac{T_{DML}}{T_{DCA}} = \frac{4}{9}.$$

(1)-ből és (2)-ből viszont – felhasználva, hogy $T_{BAC} + T_{DCA} = T_{ABCD}$ – következik, hogy

(3) $$T_{BKN} + T_{DML} = \frac{4}{9} T_{ABCD}.$$

Ugyanígy láthatjuk be, hogy:

(4) $$T_{ALK} + T_{CNM} = \frac{1}{9} T_{ABCD}.$$

Ekkor viszont (3)-at és (4)-et felhasználva:

$$T_{KLMN} = T_{ABCD} - [(T_{BKN} + T_{DML}) + (T_{ALK} + T_{CNM})] =$$
$$= T_{ABCD} - \left[\frac{4}{9} T_{ABCD} + \frac{1}{9} T_{ABCD}\right] = \frac{4}{9} T_{ABCD}.$$

Tehát a keresett arány ebben az esetben $\frac{4}{9}$.

Ha az $ABCD$ négyszög konkáv, akkor a konkáv szögnél levő csúcsból kiinduló átló egyik harmadolópontját felhasználva a $KLMN$ négyszöget átdarabolhatjuk egy olyan hatszögbe, amely már teljes egészében az $ABCD$ négyszög belsejében fekszik (2. ábra). Ezután – hasonló háromszögeket használva – lényegében az első esettel megegyező módon látható be, hogy a keresett arány most is $\frac{4}{9}$.

1988-11-378-1.eps

2.a ábra

1988-11-378-2.eps

2.b ábra

Ágoston Kolos (Szeged, Zrínyi I. Ált. Isk., 8. o. t.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. Ha a K, L, M, N pontok $m : n$ arányban osztják az oldalakat, akkor a két négyszög területének aránya

$$\frac{2m \cdot n}{(m+n)^2}.$$

Csirik János (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o. t.)