I. megoldás. Legyen A a szóban forgó négyzetszám, B ennek egy kiválasztott osztója, jelöljük A/B-t C-vel. Ekkor

$$A + B = BC + B = (C + 1).$$

Tegyük fel, hogy $A + B$ a feladat állításával ellentétben négyzetszám. Két esetet különböztetünk meg.

Ha a B osztó négyzetszám, akkor $C = A/B$ és $C + 1 = (A + B)/B$ is négyzetszámok, mivel négyzetszámok hányadosai és egészek. Két négyzetszám különbsége viszont csak akkor lehet 1, ha a nagyobbik 1, s a kisebbik 0. Márpedig $C = 0$ lehetetlen, hiszen ekkor $A = BC$ is nulla volna.

A második eset, ha a B osztó nem négyzetszám. Ekkor létezik olyan p prímszám, amelyik a B prímtényezős felbontásában páratlan hatványon szerepel. Mivel A és $A+B$ mindegyike osztható B-vel, ezért mindegyikük osztható p-vel; mivel mindegyikük négyzetszám, ezért mindegyikük p-nek egy páros kitevőjű hatványával – s a B-vel való oszthatóság alapján e kitevő nagyobb a B-ben szereplő (páratlan!) kitevőnél. Így $C = A/B$ és $C + 1 = (A + B)/C$ mindegyike osztható p-vel, ami ugyancsak lehetetlen.

Szegedy Balázs (Budapest, Kosciuszko T. u. Ált. Isk., 8. o. t.)

II. megoldás. Az előző megoldás jelöléseit használva tegyük föl ismét, hogy $A+B$ négyzetszám. Ekkor tetszőleges négyzetszámmal – tehát A-val szorozva – ismét négyzetszámot kell kapnunk.

$$(A + B)A = (BC + B)BC = B^2C(C + 1),$$

tehát $C(C + 1)$ is négyzetszám. Ez viszont nem lehet, hiszen ha $C > 0$, akkor

$$C^2 < C(C + 1) < C^2 + 2C + 1 = (C + 1)^2.$$

A kapott ellentmondás azt jelenti, hogy $A + B$ valóban nem lehet négyzetszám.

Csirik János (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Mindkét megoldásban a számelmélet alaptételének azt a következményét használtuk fel, hogy egy egész szám akkor és csak akkor négyzetszám, ha a prímtényezős felbontásban minden prímszám kitevője páros.

2. A feladat nem zárta ki a negatív osztók lehetőségét, természetesen $n^2 - n^2 = 0$, ami négyzetszám. A bizonyítások bármelyike kiadja azt a valamivel bővebb állítást, hogy egy pozitív négyzetszámnak és egy osztójának összege vagy különbsége csak abban a triviális esetben lehet négyzetszám, ha nulla.