Mivel a polinomnak pontosan két gyöke van, ezért a másodfokú tag együtthatója nem nulla. Ha $a<0$, akkor (-1)-gyel szorozva olyan polinomhoz jutunk, amelynek gyökei, illetve együtthatóinak abszolút értéke azonos az eredetiével, ezért föltehető, hogy $a>0$.

A polinomnak vannak gyökei, és ezek különbözők, így diszkriminánsa pozitív:

$$b^2>4ac. \tag{1}$$

A gyökök, x_1 és x_2, nagyságára vonatkozó feltételt a gyökök és együtthatók közti összefüggések felhasználásával írjuk fel. Mindkét gyök akkor és csak akkor pozitív, ha összegük és szorzatuk is pozitív. Mindkét gyök akkor és csak akkor kisebb 1-nél, ha $(1-x_1)$ és $(1-x_2)$ pozitív számok, azaz összegük és szorzatuk is pozitív.

A $b^2>4ac$ feltétellel együtt tehát pontosan akkor lesz mindkét gyök 0-nál nagyobb és 1-nél kisebb, ha az

$$\begin{gathered}
x_1+x_2=-\frac{b}{a},\\
x_1x_2=\frac{c}{a},\\
(1-x_1)+(1-x_2)=2-(x_1+x_2)=2+\frac{b}{a},\ \text{és az}\\
(1-x_1)(1-x_2)=1-(x_1+x_2)+x_1x_2=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}
\end{gathered}$$

mennyiségek mindegyike pozitív. Ha $a>0$, akkor az első két feltételből

$$b<0,\ c>0, \tag{2}$$

a másik kettőből pedig

$$2a+b>0,\ \text{illetve} \tag{3}$$

$$a+b+c>0\ \text{adódik.} \tag{4}$$

Azt a legkisebb pozitív egész a számot keressük, amelyhez vannak olyan b és c egészek, hogy teljesül (1), (2), (3) és (4).

(4)-ből kapjuk, hogy $a+c>-b=|b|$. A kapott egyenlőtlenség két oldalán egész számok állnak, tehát még $a+c-1\geqq|b|$ is teljesül. Ezt az (1)-ből kapható $|b|>2\sqrt{ac}$-vel összevetve

$$a+c-1>2\sqrt{ac}$$

adódik, ahonnan rendezés után a

$$(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2>1 \tag{5}$$

feltételt kapjuk.

Mivel a gyökök szorzata, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$ kisebb 1-nél, ezért $a>c$ (ezt egyébként a (1)-ből és (3)-ból is megkaphatjuk). Így (5)-ből

$$\begin{gathered}
\sqrt{a}-\sqrt{c}>1,\ \text{azaz}\\
\sqrt{a}>1+\sqrt{c}\geqq 2.
\end{gathered}$$

Tehát $a>4$.

Ha $a=5$, akkor $0<\sqrt{c}<\sqrt{a}-1$ miatt $c=1$, végül ekkor (1)-ből és (4)-ből $6>-b>\sqrt{20}$, azaz $b=-5$.

A kapott $5x^2-5x+1$ polinom együtthatóira az (1)–(4) feltételek mindegyike teljesül, és valóban két különböző, 0 és 1 közötti gyöke van.

Megjegyzések. 1. Ha $a>4$, akkor az $ax^2-ax+1=0$ egyenlet gyökei 0 és 1 között vannak és különbözők.

2. Ha nem követeljük meg, hogy a polinom együtthatói egészek legyenek, akkor természetesen bármilyen kicsi lehet a másodfokú tag együtthatójának abszolút értéke.

3. A (2)–(4) feltételeket másképpen is megkaphatjuk: Ha $a>0$, akkor az $f(x)=ax^2+bx+c$ polinom gyökei pontosan akkor esnek a $(0;1)$ intervallumba, ha $f(0)=c>0$, $f(1)=a+b+c>0$, $0<-\dfrac{b}{2a}<1$ és $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)<0$.