Megmutatjuk, hogy egyetlen olyan test van, amely eleget tesz a feladat feltételeinek, és ezt megkaphatjuk például úgy, hogy egy 3 egységnyi élhosszúságú szabályos tetraéder minden egyes csúcsát levágjuk azzal a síkkal, amelyet az illető csúcsból kiinduló élek csúcshoz közelebbi harmadolópontjai határoznak meg (1. ábra).

1988-10-311-1.eps

1. ábra

Először azt látjuk be, hogy az előírt tulajdonságokkal legfeljebb egy test rendelkezhet. Tekintsük ugyanis a feltételezett test egyik hatszöglapját, és a vele szomszédos (hozzá közös élben csatlakozó) 6 darab lapot. Ezek felváltva lesznek háromszög – hatszöglapok, hiszen minden csúcsban 2 hatszög és 1 háromszög találkozik (2. ábra). Ha az ott látott módon kiterített lapokból konvex testet készítünk, akkor az A_1, A_2, A_3, illetve D_1 és D_2 pontoknak a lapok „összehajtása" után egybe kell esni, ugyanígy egybe kell esnie a B_1, B_2, B_3; E_1, E_2 valamint a C_1, C_2, C_3; illetve F_1, F_2 pontoknak is.

1988-10-311-3.eps

2. ábra

A 3 egységnyi élhosszúságú szabályos tetraéder korábban leírt csonkolásával kapott testnek a tetraéder szabályossága miatt valóban 4 darab szabályos háromszöglapja van (minden levágott csúcs környezetében 1-1), és 4 darab szabályos hatszöglapja (a tetraéder minden lapján 1-1), látható továbbá, hogy a 12 csúcs mindegyikében 2 hatszög és 1 háromszög találkozik; ez a test tehát valóban kielégíti a feltételeket (3. ábra).

1988-10-311-2.eps

3. ábra

Ezek után a test térfogatát már könnyen kiszámíthatjuk. Az a élű szabályos tetraéder térfogata $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$; testünk térfogatát megkapjuk, ha egy 3 egységnyi élhosszúságú tetraéder térfogatából levonjuk 4 darab egységnyi élhosszúságú tetraéder térfogatát:

$$V=\frac{27\sqrt{2}}{12}-4\frac{\sqrt{2}}{12}=\frac{23\sqrt{2}}{12}\approx 2,71.$$