A két háromszög egybevágóságából nem következik, hogy az ABC háromszög szabályos. Ennek bizonyításához elegendő megadnunk egy olyan nem szabályos ABC háromszöget, amely egybevágó a feladat eljárása során kapott $A'B'C'$ háromszöggel.

1988-09-260-1.eps

1. ábra

Válasszuk az ABC háromszög csúcsait egy szabályos hatszög csúcsai közül az 1. ábrán látható módon. Az ABC háromszögben tehát A-nál 90°-os, B-nél 60°-os, C-nél pedig 30°-os szög van. Jelöljük a hatszög további csúcsait K, L és M-mel. Ekkor az $ABKLCM$ hatszög szabályosságából következik, hogy:

(1) – a BC szakasz f_A felező merőlegese az AM és a KL szakaszoknak is felező merőlegese;

(2) – a CA szakasz f_B felező merőleges átmegy a K és a M pontokon és merőlegesen felezi a BL szakaszt;

(3) – az AB szakasz f_C felező merőlegese egybeesik a CL szakasz felező merőlegesével.

Ezeket felhasználva könnyen kapjuk az A', B', C' pontokat. A-nak f_A-ra vonatkozó tükörképe (1) miatt M, M-nek f_B-re vonatkozó tükörképe pedig (2) miatt önmaga, tehát $A'\equiv M$. B-nek f_B-re vonatkozó tükörképe (2) miatt L, amit f_C-re tükrözve (3) miatt C-t kapjuk, így $B'\equiv C$. Végül C-t f_C-re tükrözve (3) alapján L-t kapjuk, L-nek f_A-ra való tükrözésekor pedig (1) miatt K-t, azaz $C'\equiv K$. Esetünkben tehát az $A'B'C'$ háromszög éppen az MCK háromszög, ez pedig a hatszög szabályos volta miatt valóban egybevágó az ABC háromszöggel.

Tokodi Tamás (Szeged, JATE Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Ismeretes, hogy ha a t_1 egyenest a φ szögű forgatás viszi a t_2 egyenesbe, akkor a t_1-re majd a t_2-re vonatkozó tengelyes tükrözés egy forgatással helyettesíthető. A forgatás középpontja a tengelyek metszéspontja, szöge pedig $2\,\varphi$.

A feladatban szereplő tükrözések tengelyei átmennek az ABC háromszög körülírt körének O középpontján, így az A', B', C' pontokat az A, B, C pontok O körüli elforgatottjaiként kapjuk.

1988-09-261-1.eps

2. ábra

Betűzzük a háromszög csúcsait pozitív körüljárás szerint (2. ábra). Ekkor f_A-t az f_B-be az O körüli $-\gamma$ szögű elforgatás viszi, így A' az A-nak O körüli -2γ szögű elforgatottja, $AOA'\sphericalangle=-2\gamma$.
Hasonlóan kapjuk, hogy $BOB'\sphericalangle=-2\alpha$ és $COC'\sphericalangle=-2\beta$.

A középponti és kerületi szögek tétele szerint $AOB\sphericalangle=2ACB\sphericalangle=2\gamma$, és hasonlóan $BOC\sphericalangle=2\alpha$, illetve $COA\sphericalangle=2\beta$.

Ezután

$$A'OB'\sphericalangle=A'OA\sphericalangle+AOB\sphericalangle+BOB'\sphericalangle=2\gamma+2\gamma-2\alpha=4\gamma-2\alpha,$$

és hasonlóan

$$\begin{aligned}B'OC'\sphericalangle&=4\alpha-2\beta\quad\text{és}\\ C'OA'\sphericalangle&=4\beta-2\gamma.\end{aligned}$$

Mármost a két háromszög akkor és csak akkor egybevágó, ha a 2α, 2β, 2γ középponti szögekhez tartozó BC, CA, AB húrok valamilyen sorrendben egyenlők a $4\gamma-2\alpha$, $4\alpha-2\beta$ és a $4\beta-2\gamma$ középponti szögekhez tartozó $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ húrokkal. Két középponti szöghöz adott körben pontosan akkor tartoznak egyenlő húrok, ha a két szög összege vagy különbsége a 2π egész számú többszöröse. Ez igen sok lehetőséget jelent; a megoldásban adott ellenpélda $\left(\alpha=\frac{\pi}{2},\ \beta=\frac{\pi}{3},\ \gamma=\frac{\pi}{6}\right)$ az

$$\begin{aligned}A'OB'\sphericalangle+AOB\sphericalangle&=0,\\ B'OC'\sphericalangle+COA\sphericalangle&=2\pi,\\ C'OA'\sphericalangle+BOC\sphericalangle&=2\pi\end{aligned}$$

feltételekből kapható.

2. A megadott példában a két háromszög az $A\to B'$, $B\to A'$, $C\to C'$ megfeleltetés révén volt egybevágó. Mint a 3. ábra szabályos 13-szögében láthatjuk, még abban az esetben sem következik a két háromszög egybevágóságából az ABC háromszög szabályos volta, ha az egybevágóság során az A-nak A', B-nek B', C-nek pedig C' felel meg. Látható, hogy a két háromszög tükrös a CC' felező merőlegesére.

1988-09-262-1.eps

3. ábra

$$\alpha=\frac{9\pi}{13},\quad \beta=\frac{\pi}{13},\quad \gamma=\frac{3\pi}{13},$$
$$AOA'\sphericalangle=-2\gamma=-\frac{6\pi}{13},$$
$$BOB'\sphericalangle=-2\alpha=-\frac{18\pi}{13},$$
$$COC'\sphericalangle=-2\beta=-\frac{2\pi}{13}.$$

Ha viszont még azt is megköveteljük, hogy a két háromszög egyező körüljárású legyen, tehát egyetlen O körüli forgatás vigye az ABC háromszöget az $A'B'C'$ háromszögbe – ez teljesül a megoldásban mutatott ellenpéldán, de ott az azonos betűjelű csúcsok nem egymásnak felelnek meg – akkor ezekből már valóban következik, hogy az ABC háromszög szabályos.