Legyen az $ABCD$ húrnégyszög átlóinak metszéspontja P, a P-ből az oldalakra bocsátott merőlegesek talppontjai pedig rendre K, L, M és N (1. ábra). Megmutatjuk, hogy a $KLMN$ négyszög szemközti szögeinek összege 180°, továbbá hogy e négyszög minden szögfelezője átmegy a P ponton. Az előbbiből következik, hogy $KLMN$ húrnégyszög, utóbbi pedig azt jelenti, hogy kör írható belé.

1988-05-216-1.eps

1. ábra

A P pontból az oldalakra bocsátott merőlegesek négy húrnégyszögre bontják az eredeti négyszöget, hisz mindegyikükben van két egymással szemközti derékszög. Az $AMPL$ húrnégyszögben:

(1) $$MAP\sphericalangle = MLP\sphericalangle = \alpha,$$

az $LPKD$ húrnégyszögben pedig:

(2) $$PLK\sphericalangle = PDK\sphericalangle = \alpha'.$$

De $MAP\sphericalangle = BAC\sphericalangle = BDC\sphericalangle = PDK\sphericalangle$, mert az $ABCD$ húrnégyszögben a $BAC\sphericalangle$ és a $BDC\sphericalangle$ a $\widehat{BC}$ íven nyugvó kerületi szögek, így $\alpha = \alpha'$. Az eddigieket összefoglalva: az MLK szög nagysága 2α, szögfelezője pedig az LP egyenes (vagyis a szögfelező átmegy a P ponton).

Hasonlóan látható be, hogy ha az egymással egyenlő ABD és ACD szögeket β-val jelöljük, akkor $MNK\sphericalangle = 2\beta$, az MNK szög felezője pedig az NP egyenes. Így a $KLMN$ négyszög két szemben levő szögének összege :

(3) $$MLK\sphericalangle + MNK\sphericalangle = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta).$$

De $\alpha+\beta = 90°$, mert az ABP háromszög $P-$ nél derékszögű, másik két szöge pedig éppen α és β. (3) tehát azt jelenti, hogy a $KLMN$ négyszög szemközti szögeinek összege 180°, vagyis a négyszög húrnégyszög. Már láttuk, hogy ebben a négyszögben az LP és az NP egyenesek szögfelezők. Hasonló módon látható be, hogy a KP és az MP egyenesek is azok, azaz a $KLMN$ négyszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy a négyszög érintőnégyszög.

Ezzel az állítást beláttuk.

Sztrida Ákos (Szekszárd, Garay J. Gimn., II. o. t.)
dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Az érintőnégyszög legismertebb tulajdonsága az, hogy szemközti oldalainak összege egyenlő. A $KLMN$ négyszög érintőnégyszög voltát ennek alapján is be lehet bizonyítani.

1988-05-217-1.eps

2. ábra

A 2. ábrán a P-ből merőlegeseket bocsátunk a $KLMN$ négyszög oldalaira. Ekkor az LT_2P és az LT_1P derékszögű háromszögek egybevágók, mert átfogójuk közös és az L-nél lévő szögük egyenlő. Ezért $LT_1 = LT_2$. Hasonlóan látható be, hogy $KT_1 = KT_4$, $NT_4 = NT_3$ és $MT_3 = MT_2$, és így a $KLMN$ négyszög szemközti oldalainak összege valóban egyenlő.

Tóth Ildikó (Nyíregyháza, Vásárhelyi P. Szki., I. o. t.)

2. A $KLMN$ négyszög érintőnégyszög voltának bizonyításakor nem használtuk ki, hogy eredeti négyszögünk átlói merőlegesek. Tetszőleges húrnégyszögben igaz tehát, hogy az átlók metszéspontjából az oldalakra bocsátott merőlegesek talppontjai érintőnégyszöget alkotnak.