Ismeretes, hogy

$$t^4 + t^2 + 1 = (t^2 + t + 1)(t^2 - t + 1), \tag{2}$$

így ha valamely pozitív egész $t-$ re $t^2 - t + 1$ felírható $x^2 + x + 1$ alakban, akkor az $y = t,\ z = t^2$ választással az (1) egyenlet egy megoldását kapjuk.

Elegendő tehát megmutatnunk, hogy (2) jobb oldalán a második tényező, $t^2 - t + 1$ végtelen sok pozitív egész t-re írható $x^2 + x + 1$ alakba. A

$$t^2 - t + 1 = x^2 + x + 1$$

egyenletből rendezés és szorzattá alakítás után

$$(x + t)(x - t + 1) = 0$$

adódik. Ha az első tényező 0, akkor x és t ellenkező előjelűek lesznek; a második tényezőből kapott megoldást $(x = t-1)$ visszahelyettesítve viszont a

$$t^2 - t + 1 = (t - 1)^2 + (t - 1) + 1$$

azonosságot kapjuk, ennek felhasználásával pedig (2) a

$$(t^2)^2 + t^2 + 1 = (t^2 + t + 1)[(t - 1)^2 + (t - 1) + 1]$$

alakot ölti.

Az (1) egyenletnek tehát megoldásai a $(t - 1,\ t,\ t^2)$ számhármasok, amelyek pozitív számokból állnak, ha $t > 1$ és a t különböző értékeire különbözőek, így az (1) egyenlet valóban végtelen sok, pozitív számokból álló $(x,\ y,\ z)$ számhármasra teljesül.

Benkő Dávid (Budapest, Móricz Zs. Gimn., III. o. t.)
dolgozata nyomán

Megjegyzések. 1. Az (1) egyenletnek nemcsak a talált típusú megoldásai léteznek. Látható, hogy az $(1,\ 9,\ 16)$ számhármas is megoldás, és nem $(t - 1,\ t;\ t^2)$ alakú.

2. A megoldás alapján könnyen látható, hogy az

$$(x_1^2 + x_1 + 1)(x_2^2 + x_2 + 1)\ldots(x_n^2 + x_n + 1) = y^2 + y + 1$$

egyenletnek is végtelen sok pozitív elemű

$$(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n, y)$$

megoldása van.

Mezei József (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)