I. megoldás. Tükrözzük a B pontot az AC oldal F felezőpontjára. Legyen a tükörkép $B^{'}$ (1. ábra).

1988-05-213-2.eps

1. ábra

Ekkor a $B^{'}CP$ és a BTP háromszögek hasonlóak, mert a megfelelő oldalaik párhuzamosak. Így a két háromszög megfelelő oldalainak aránya megegyezik:

$$\frac{CP}{PT}=\frac{B^{'}C}{BT}.$$

De $B^{'}C=AB=AT+TB$, azaz:

$$\frac{CP}{PT}=\frac{AB}{BT}=\frac{AT+TB}{BT}=\frac{AT}{BT}+1.$$

Mivel CT az ABC háromszög belső szögfelezője, ezért $\dfrac{AT}{BT}=\dfrac{AC}{BC}$, és így

$$\frac{CP}{PT}=\frac{AC}{CB}+1.$$

Ezt átrendezve éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

II. megoldás. Jelöljük a háromszög oldalait és szögeit a szokásos módon a, b, c, illetve α, β, γ-val. Ismert, hogy a C-ből induló belső szögfelező hossza:

$$CT=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}. \tag{1}$$

(Az (1) összefüggés mindkét oldalát $\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$-vel szorozva és jobbról balfelé olvasva éppen azt kapjuk, hogy az ABC háromszög területe megegyezik az ATC és a BTC háromszögek területeinek összegével.)

1988-05-214-1.eps

2. ábra

A CT egyenes nem csak az ABC, hanem az FBC háromszögben is szögfelező (2. ábra). Ezért hasonlóan

$$CP=\frac{2a\cdot\frac{b}{2}}{a+\frac{b}{2}}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{2ab}{2a+b}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}. \tag{2}$$

(1)-et és (2)-t felhasználva:

$$\frac{CP}{PT}-\frac{AC}{BC}=\frac{CP}{CT-CP}-\frac{AC}{BC}=\frac{\frac{2ab}{2a+b}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}{\frac{2ab}{a+b}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}-\frac{2ab}{2a+b}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}-\frac{b}{a}.$$

Az első törtet $2ab\cos\dfrac{\gamma}{2}$-val egyszerűsítve, (ami nem 0) majd rendezve:

$$\frac{CP}{PT}-\frac{AC}{BC}=\frac{\frac{1}{2a+b}}{\frac{1}{a+b}-\frac{1}{2a+b}}-\frac{b}{a}=\frac{a+b}{(2a+b)-(a+b)}-\frac{b}{a}=\frac{a+b}{a}-\frac{b}{a}=1.$$

Ez pedig éppen a bizonyítandó állítás.