I. megoldás. Jelöljük a háromszög csúcsait $A,\ B,\ C$ vel, súlypontját S-sel, az egymásra merőleges súlyvonalak pedig legyenek AF és BE (1. ábra).

1988-04-171-1.eps

1. ábra

Mivel a B középpontú, $\frac{3}{2}$ arányú nagyítás után az S pont az AC oldal E felezőpontjába kerül, ugyanez a nagyítás a BF szakasznak a feltétel szerint S-en áthaladó Thalesz-körét egy E-n áthaladó körbe viszi. Egy újabb E-n átmenő vonalat kapunk, ha megrajzoljuk a C középpontú, $\frac{AC}{2}$ sugarú kört.

A szerkesztés menete ezután a következő. Fölvesszük az ismert BC oldalt és megrajzoljuk a BD átmérőjű félkört, ahol D az F pont képe a B középpontú, $\frac{3}{2}$ arányú nagyítás során, azaz $BD=3BC/4$. Ebből a körből a C középpontú, $\frac{AC}{2}$ sugarú kör metszi ki az AC oldal E felezőpontját. Végül az A csúcsot a C pont E-re vonatkozó tükörképeként kapjuk.

Akkor és csak akkor van megoldás, ha a két kör metszi egymást, ami pontosan akkor igaz, ha az $\frac{AC}{BC}$ arány $\frac{1}{2}$ és 2 közé esik, azaz $\frac{1}{2}<\frac{AC}{BC}<2$. Ilyenkor két egybevágó háromszöget kapunk, amelyekre nyilván teljesülnek a feltételek.

II. megoldás. A második ábra jelöléseit használva: a $BSF,\ ASE$ és BSA háromszögek derékszögűek, ezért igaz rájuk Pitagorasz tétele.

1988-04-171-2.eps

2. ábra

Az egyes szakaszok hosszának felírásakor felhasználjuk, hogy a súlyvonalak harmadolják egymást:

$$\frac{a^2}{4}=4x^2+y^2,$$
$$\frac{b^2}{4}=4y^2+x^2,$$
$$c^2=4x^2+4y^2.$$

Ezekből egyszerű számolással adódik, hogy $a^2+b^2=5c^2$, vagyis $\sqrt{5}c=\sqrt{a^2+b^2}$. Az a és b befogójú derékszögű háromszög átfogója éppen $\sqrt{a^2+b^2}$, tehát ezt a szakaszt meg tudjuk szerkeszteni. $\sqrt{5}$ éppen az 1 és 2 befogójú derékszögű háromszög átfogója, tehát ha ehhez a háromszöghöz hasonló háromszöget szerkesztünk, melynek átfogója éppen $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}c$, akkor a 3. ábrán látható háromszögek hasonlósága miatt:
$\frac{c}{1}=\frac{\sqrt{5}c}{\sqrt{5}}$, vagyis a nagyobbik háromszög kisebb befogója c.

1988-04-171-3.eps

3. ábra

Ha pedig a c oldalt ilyen módon megszerkesztettük, akkor az eredeti háromszögnek már mindhárom oldalát ismerjük, tehát a háromszöget meg tudjuk szerkeszteni.

A feladatnak akkor van megoldása, ha az $a,\ b,\ c$ oldalakra teljesül a háromszög-egyenlőtlenség:

$$a+b>c=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}};\quad a+c>b;\quad b+c>a.$$

Ezek közül az első mindig fennáll, a két utóbbi pedig pontosan akkor, ha $\frac{1}{2}b<a<2b$.

Megjegyzés. A szerkesztés az I. megoldás alapján akkor is elvégezhető, ha a súlyvonalak nem 90°-os, hanem tetszőleges α szöget zárnak be, csak BD fölé nem Thalesz-kört, hanem a megfelelő látószög körívét kell szerkeszteni.