Válasszuk a kör sugarát egységnyinek, és legyen a szóban forgó $BDFH$ téglalap oldalainak hossza $2a$, illetve $2b$ $(0 < a,\ b < 2)$. A téglalap területe ekkor $4ab$. Ha O a kör középpontja, akkor a nyolcszög területe az $OFGH$, $OHAB$, $OBCD$ és $ODEF$ deltoidok területének összege.

1988-05-213-1.eps

Egy deltoid területe az átlói szorzatának a fele, a fenti deltoidok területe így rendre $\frac{1}{2}\cdot 2b\cdot 1$; $\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 1$; $\frac{1}{2}\cdot 2b\cdot 1$; $\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 1$, és ebből a nyolcszög területe $2a+2b$. A két idom területének aránya tehát

$$\frac{2a+2b}{4ab}=\frac{a+b}{2ab}.$$

Mivel a és b pozitív, az $\frac{a+b}{2ab}$ kifejezés akkor minimális, amikor reciproka, $\frac{2ab}{a+b}$ maximális. Ez utóbbi éppen az a és b számok harmonikus közepe, ami nem lehet nagyobb a két szám négyzetes közepénél, $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$-nél, és egyenlő is csak akkor lehet vele, ha $a=b$. Miután esetünkben Pitagorasz tétele szerint $a^2+b^2=1^2=1$,

$$\frac{2ab}{a+b}\leqq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Így $\frac{2ab}{a+b}$ akkor maximális, ha $a=b$, és ekkor értéke $\frac{\sqrt{2}}{2}$, ezért a nyolcszög és a téglalap területének aránya akkor minimális, ha $a=b$, vagyis ha a téglalap négyzet (a nyolcszög pedig szabályos), s a minimum értéke $\sqrt{2}$.

Megjegyzés. Az olvasó könnyen igazolhatja a pozitív a és b számok harmonikus, mértani, számtani és négyzetes közepére vonatkozó egyenlőtlenség-sorozatot:

$$\frac{2ab}{a+b}\leqq\sqrt{ab}\leqq\frac{a+b}{2}\leqq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Egyenlőség minden esetben csak akkor van, ha $a=b$.