I. megoldás. Balázs kitalálhatja Anna számait egyetlen kérdéssel, ha

$$B(x,\ y)=(x+y)(x+y+1)-y=(x+y)^2+x$$

értékét kérdezi meg.

Mivel x és y természetes számok, ezért

$$(x+y)^2\le B(x,\ y)<(x+y+1)^2, \tag{1}$$

és így Anna számai összegének a négyzete a $B(x,\ y)$-nál nem nagyobb négyzetszámok legnagyobbika, azaz

$$x+y=[\sqrt{B(x,\ y)}].$$

Anna válasza alapján tehát Balázs először kiszámolhatja a két szám összegét, majd ennek négyzetét $B(x,\ y)$ -ból kivonva x értékét, végül y-t is.

Megjegyzések 1. A feladat szövegezésekor elég szerencsétlen módon kíséreltük meg kizárni, hogy a gondolt számok hatványkitevőként is előforduljanak. Ezt megengedve ugyanis pl. a $2^x\cdot 3^y$ értékéből az egyértelmű prímfelbontás miatt x és y megkapható. A hatványozás korlátozása valójában csupán erre a lehetőségre vonatkozott volna, de a „fürdővízzel együtt a gyereket is kiöntöttük" – emiatt volt szükség az $(x+y)^2$ „kerülő úton" való felírására. Ez nem tartozik a feladat lényegéhez, és emiatt olvasóink elnézését kérjük.

2. A fentieket szem előtt tartva Balázs akkor is boldogulhat egyetlen kérdéssel, ha Anna n darab számra gondolt. Ha ezek a számok $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$, akkor a

$$B_n(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)=(x_1+\ldots+x_n)^n+(x_1+\ldots+x_{n-1})^{n-1}+\ldots+(x_1+x_2)^2+x_1$$

formula megfelelő. Fennáll ugyanis – és a binomiális tétel felhasználásával könnyen igazolható – az (1)-hez hasonló

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)^n\le B_n(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)<(x_1+\ldots+x_n+1)^n \tag{2}$$

egyenlőtlenség, és így a közölt megoldáshoz hasonlóan Balázs rendre kiszámolhatja az

$$\begin{aligned}&x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n,\\&x_1+x_2+\ldots+x_{n-1},\\&\vdots\\&x_1+x_2,\\&x_1\end{aligned}$$

mennyiségeket, és így magukat a gondolt számokat is.

3. A teljesség kedvéért megemlítjük, hogy egy z változó n-edik hatványa kifejezhető olyan formulával is, amelyik nem tartalmaz hatványozást. Egy lehetőség például a

$$z^n=\big((z-1)+1\big)\cdot\big((z-2)+2\big)\cdot\ldots\cdot\big((z-n)+n\big)$$

azonosság kifejtett alakjából nyerhető.

II. megoldás. Ahhoz, hogy megoldja a feladatot, Balázs formulájának olyan kétváltozós $f(x,y)$ függvénynek kell lennie, amelyik különböző számpárokhoz különböző egész számokat rendel, tehát kölcsönösen egyértelműen képezi le a természetes számokból készíthető rendezett párok halmazát az egész számok halmazába. Ismeretes, hogy ilyen függvény létezik, ezzel azonban Balázs még nincsen kisegítve, neki ugyanis formulával kell egy ilyen függvényt megadnia, másfelől a függvényérték alapján rá kell találnia a gondolt számpárra, vagyis használnia kell az f függvény inverzét.

Az alábbi táblázat egy ilyen $f(x,\ y)$ elkészítését szemlélteti.

1988-04-169-1.eps

A táblázat $(n+1)$-edik átlójában az olyan rendezett számpárokhoz rendelt függvényértékek találhatók, amelyekben az elemek összege n. Azon rendezett számpárok száma, amelyekben az elemek összege kisebb, mint n, éppen $\binom{n+1}{2}$ – ennyiféleképpen választható ki az összeg és a számpár első eleme. Ha ezekhez a számpárokhoz már hozzárendeltük a $0,\ 1,\ \dots,\ \binom{n+1}{2}-1$ számokat, akkor a

$$(0;\ n),\ (1;\ n-1),\ \dots,\ (i;\ n-i),\ \dots,\ (n;\ 0)$$

számpárokhoz rendre az

$$\binom{n+1}{2},\ \binom{n+1}{2}+1,\ \ldots,\ \binom{n+1}{2}+i,\ \ldots,\ \binom{n+1}{2}+n=\binom{n+2}{2}-1$$

számokat rendeljük. Így különböző párokhoz különböző számokat rendelünk, és Balázs megfelelő formulája

$$\binom{x+y+1}{2}+x.$$

Ez még tartalmaz 2-vel való osztást, de ennek kétszerese, $(x+y+1)(x+y)+2x$ megfelel a feltételeknek.

A helyettesítési értéket kettővel osztva a táblázat alapján Balázs rátalálhat Anna számaira.

Megjegyzések. 4. A fenti megoldásban lényegében azt láttuk be, hogy minden m természetes szám egyértelműen írható

$$m=\binom{a}{2}+\binom{b}{1}$$

alakban, ahol $a>b\geq 0$ $\left(\binom{1}{2}=\binom{0}{1}=0\right)$. A megoldásban Balázs az $a==x+y+1,\ b=x$ választással használja ezt az eredményt, pontosabban az ehhez a számpárhoz kiszámolt m értékből „keresi vissza” a és b értékét. Ehhez valójában nincs szüksége a táblázatra, hiszen adott m természetes számhoz kell kiszámolnia a nála nem nagyobb $\binom{a}{2}$ alakú számok legnagyobbikát, hasonlóan ahhoz, ahogyan az első megoldásban $m=a^2+b$ értékéből $(a=x+y\geq x=b)$ kellett meghatároznia az m-nél nem nagyobb négyzetszámok legnagyobbikát.

5. A második megoldás is általánosítható, igaz ugyanis – és például teljes indukcióval könnyen igazolható –, hogy adott n esetén minden m természetes szám egyértelműen írható

$$m=\binom{a_n}{n}+\binom{a_{n-1}}{n-1}+\ldots+\binom{a_i}{i} \tag{3}$$

alakba, ahol $a_n>a_{n-1}>\ldots>a_i\geq i\geq 1$.

Ekkor az

$$\begin{aligned}
a_n&=x_1+x_2+\ldots+x_n+n,\\
a_{n-1}&=x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+n-1,\\
&\vdots\\
a_2&=x_1+x_2+2,\\
a_1&=x_1+1
\end{aligned}$$

választással m értékéből az $a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_2,\ a_1$ számok rendre meghatározhatók, és innen az $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ értékek is.