

I. megoldás. Ha $x = y = -\frac{1}{2}$, akkor a feltétel jobb oldalán $x + y + 1 = 0$, így $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ és $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ közül legalább az egyik – például $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ – szintén 0.

Ha most $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, akkor a bal oldal értéke továbbra is 0, a jobb oldalé viszont 1. Ez azt jelenti, hogy nem léteznek a megadott tulajdonságú f és g függvények.

II. megoldás. A feltételben x , y , illetve mindkét változó helyére nullát írva a következő egyenlőségek írhatók fel:

$$(1) \quad f(0) \cdot g(y) = y + 1,$$

$$(2) \quad f(x) \cdot g(0) = x + 1,$$

$$(3) \quad f(0) \cdot g(0) = 1.$$

Ezután (1) és (2) szorzatából

$$(4) \quad f(0) \cdot g(0) \cdot f(x) \cdot g(y) = (x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1.$$

A kapott egyenlőség bal oldalán $f(0) \cdot g(0)$ értéke (3) szerint 1, így (4)-ből

$$f(x) \cdot g(y) = xy + x + y + 1 \quad \text{adódik.}$$

Azt kaptuk, hogy ha f és g a megadott tulajdonságú függvények, akkor $x + y + 1 = xy + x + y + 1$, azaz

$$xy = 0$$

minden x , y -ra, ami nyilván nem igaz, és így nem léteznek a megfelelő f és g függvények.

III. megoldás. Ha léteznek a keresett f és g függvények, akkor a feltétel szerint

$$f(5) \cdot g(3) = 9, \quad f(3) \cdot g(5) = 9,$$

$$f(5) \cdot g(5) = 11, \quad f(3) \cdot g(3) = 7.$$

Az első és a második két egyenlőségben a bal oldalak szorzata egyenlő: $f(5) \cdot g(3) \cdot f(3) \cdot g(5)$, a jobb oldalaké viszont nem ($9 \cdot 9 \neq 11 \cdot 7$), így nincsenek olyan f és g függvények, amelyekre teljesülne a feltétel.

Megjegyzés. Sok dolgozat szerzője abból indult ki, hogy a keresett f és g lineáris függvény, vagy legalábbis x -nek, illetve y -nak valamilyen polinomja. Erről a szövegben nincsen szó, a feladat teljesen általános függvényekről, tehát a valós számok közötti egyértelmű hozzárendelésről beszélt.