

Ha az f félegyenes az OA vagy az OB félegyenessel esik egybe, akkor az AM és a BN egyenesek is egybeesnek, így a metszéspontjuk nem jön létre.

A szóban forgó egyenesek az f minden más helyzetében különbözök és benne vannak az AB és az f síkjában – sokan megfélekedtek arról, hogy a feladat szövege szerint az f a tér tetszőleges, O kezdőpontú félegyenes –, így tekintjük a feladatot ebben a síkban.

1988-04-165-1.eps

A feltétel miatt egyenlő szárú AOM és BON háromszögek t_1 és t_2 szimmetriatengelyei az O pontban merőlegesen metszik egymást (ábra), hiszen felezik az O csúcsnál lévő szárszögeket, melyek összege 180° . Mivel t_1 merőleges AM -re, t_2 pedig BN -re, ezért AM és BN is merőleges egymásra, P metszéspontjukból az AB szakasz derékszögben látszik. A P pont tehát rajta van az AB szakasz Thalész-gömbjén, de A -tól és B -től különbözik.

Megfordítva, ha P olyan pont a térben, melyre $APB \leq 90^\circ$, akkor az O -n átmenő, AP -re és BP -re merőleges t_1 , illetve t_2 egyenesek merőlegesek egymásra. Ezért az OA félegyenesnek a t_1 -re vonatkozó tükörképe egybeesik az OB félegyenes t_2 -re vonatkozó tükörképével. Ha f jelöli ezt a közös tükörképet, akkor a t_1 -re vonatkozó szimmetria miatt f és AP M metszéspontjára $OA = OM$, f és BP N metszéspontjára pedig $OB = ON$. Van tehát olyan helyzete az f félegyenesnek, amikor a leírt szerkesztés éppen a kiszemelt P pontot adja.

A keresett mértani hely tehát az AB átmérőjű gömb az A és a B pontok kivételével.

Megjegyzés. Ha az f félegyenes megegyezik az OA vagy az OB félegyenessel, akkor az M és N pont egybeesik az A , illetve B ponttal. Ezekben az esetekben a P pontot is tekinthetjük úgy, hogy az egybeesik az A , illetve B ponttal. Ezt az indokolja, hogy ha az f félegyenes „elég közel” van pl. az OA félegyeneshez, akkor az AM egyenes „majdnem merőleges az AB szakaszra”, a BN egyenes pedig „majdnem egybeesik az AB egyenessel”. Ezért ha f egybeesik AB -vel, akkor célszerű az AM egyenest úgy tekinteni, mint egy AB -re merőleges egyenest, a BN egyenest pedig úgy, mint az AB egyenest.

Ekkor pedig az AM és BN egyenesek metszéspontjának szerepét az A pont veszi át. A határértékszámítás fogalmait felhasználva ez a gondolatmenet pontosabbá tehető, de ez meghaladná lapunk kereteit.