I. megoldás. Megmutatjuk, hogy létezik ilyen táblázat és ehhez megadunk egy megfelelő kitöltést. Vegyük észre, hogy

$$1^2+3^2+5^2+7^2+11^2+13^2+17^2+19^2=1024=32^2.$$

Ebben az összegben a másodiktól kezdve minden tag egy páratlan prímszám négyzete, a nyolc darab szám összege pedig négyzetszám. Ezeket a számokat írjuk táblázatunk első sorába.

Az első oszlop első hét elemének az $1,\ 2^2,\ 2^4,\ \dots\ 2^{12}$ számokat választjuk. Ezek mindegyike négyzetszám, összegük 5461, páratlan: $2k+1$ alakú. Ha most az első oszlop utolsó mezőjébe $k^2=\left(\dfrac{5461-1}{2}\right)^2=2730^2$-t írunk, akkor a $(2k+1)+k^2=(k+1)^2$ azonosság miatt az első oszlop elemeinek összege is négyzetszám (2731^2).

Az első oszlop és az első sor kitöltése után a táblázat további mezőibe írjuk az adott mező sorában, illetve oszlopában álló első elemek szorzatát, tehát legyen $a_{ij}=a_{1j}\cdot a_{i1}$. Így a táblázat további elemei is négyzetszámok, hiszen két négyzetszám szorzata is négyzetszám.

Ekkor bármelyik sor elemeinek az összege az első sor elemei összegének és a szóban forgó sor első elemének, tehát két négyzetszámnak a szorzata és így maga is négyzetszám. Hasonlóan kapjuk, hogy az így kitöltött táblázat minden egyes oszlopában is négyzetszám az elemek összege. Meg kell még mutatnunk, hogy a táblázat mezőibe különböző számok kerültek.

A táblázat első hét sorára ez nyilván igaz, hiszen itt bármely két elem prímtényezős felbontása különböző. A nyolcadik sorban sincs két egyenlő szám, mert itt az elemek szigorúan monoton nőnek. Végül az első hét sor legnagyobb eleme, $19^2\cdot 2^{12}$ kisebb, mint a nyolcadik sor legkisebb eleme, 2730^2, ezért az első hét sor és a nyolcadik sor elemei között sincsenek egyenlők. Táblázatunkra tehát valamennyi feltétel teljesül.

II. megoldás. Belátjuk, hogy bármilyen $n\times k$ -as táblázat is kitölthető a feladat előírásainak megfelelően. Ha n vagy k értéke 1, akkor az állítás a Gy. 2408. gyakorlat állításából következik. (A megoldást lásd a KÖMAL 1987/10. számának 313—4. oldalán.) Ha $n=k=2$, akkor egy megfelelő kitöltés az ábrán látható.

15^2	20^2	25^2
36^2	48^2	60^2
39^2	52^2	

Legyen most a táblázat sorainak a száma n, oszlopainak száma pedig k. Az előbbiek szerint föltehető, hogy $k\geqq 2$ és $n>2$. A Gy. 2408. gyakorlat állítása szerint ekkor létezik négyzetszámoknak olyan $0<a_1<a_2<\ldots<a_k$ sorozata, hogy $(a_1+a_2+\ldots+a_k)=A$ is négyzetszám.

A táblázat kitöltéséhez ezután négyzetszámok olyan $b_1<b_2<\ldots<b_n$ sorozatát adjuk meg, melyre

i) $b_1=1$;
ii) $b_1+b_2+\ldots+b_n=B$ négyzetszám;
iii) $b_{i+1}>b_ia_k \quad (i=1,2,\ldots,n-1)$, tehát a (b_i) sorozat „gyorsan nő”.

Ha ezután a táblázat i-edik sorának j-edik mezőjébe a b_ia_j számot írjuk $(1\leqq i\leqq n,\ 1\leqq j\leqq k)$, akkor minden mezőbe négyzetszám kerül, az i-edik sorban, illetve a j-edik oszlopban pedig $b_i\cdot A$, illetve $a_j\cdot B$ az elemek összege, és ezek is négyzetszámok.

A táblázat minden egyes sorában nőnek az elemek, így egyetlen sorban sem állhat két egyenlő szám. Ami a táblázat két különböző sorát illeti, *iii)* -ból következik, hogy a kettő közül a kisebb sorszámúban még a legnagyobb elem is kisebb, mint a másik sor legkisebb eleme. Az így kitöltött táblázat tehát megfelel a feladat előírásainak.

Hátravan még a (b_i) sorozat elkészítése. Legyen ez a sorozat a következő:

$b_1\ =\ 1$;
b_2 : egy $4a_k$-nál nagyobb páros négyzetszám;
b_3 : egy b_2a_k-nál nagyobb páros négyzetszám;
.
.
.
b_{n-1} : egy $b_{n-2}\cdot a_k$-nál nagyobb páros négyzetszám;
$b_n=\left(\dfrac{b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}}{2}\right)^2 \qquad (n\geqq 3).$

A sorozat elemei négyzetszámok, összegük:

$$1+(b_2+\ldots+b_{n-1})+\left(\frac{b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}}{2}\right)^2=\left(1+\frac{b_2+\ldots+b_{n-1}}{2}\right)^2$$

négyzetszám.

A *iii)* tulajdonságot a sorozat értelmezése miatt elegendő a $b_n>b_{n-1}\cdot a_k$ esetre igazolni. Ha $n=2$ vagy $n=3$, akkor ez a b_2 értelmezéséből következik.

Ha $n\geqq 4$, akkor

$$b_n \geqq \left(\frac{b_2 + b_{n-1}}{2}\right)^2 > b_{n-1} \cdot \frac{b_2 + b_{n-1}}{2} > b_{n-1} \cdot a_k.$$

Ezzel igazoltuk, hogy a b_i sorozat rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal, így a bizonyítást befejeztük.