

A feladat állítása jóval általánosabb körülmények között is igaz. Osszuk ugyanis a négyszög szemközti AB és CD , illetve BC és AD oldalait $2n$, illetve $2m$ – tehát mindkét esetben páros sok – egyenlő részre. (A feladatban $n = m = 4$.) Ha most a szemközti oldalak megfelelő osztópontjait összekötő szakaszok révén nyert felosztás összesen $4mn$ darab kis négyszögét színezzük ki sakktáblaszerűen, akkor továbbra is igaz, hogy a fekete négyszögek területének összege egyenlő a fehérekével.

1988-03-115-1.eps

1. ábra

A bizonyítás során az alábbi két segédtelet használjuk fel:

1. Egy konvex négyszöget a két középvonala négy olyan négyszögre oszt, melyek közül a két-két szemközti területének az összege egyenlő (1. ábra). (Ez éppen a feladat állítása az $n = m = 1$ esetben.)
2. Ha egy konvex négyszög szemközti oldalait k - k , illetve l - l egyenlő részre osztjuk ($k \geq 2$, $l \geq 2$), akkor a megfelelő osztópontokat összekötő szakaszokat ugyancsak egyenlő részekre osztják a létrejövő metszéspontok (2. ábra).

1988-03-116-1.eps

2. ábra

1988-03-116-2.eps

3. ábra

A fentiek felhasználásával már könnyen adódik a bizonyítandó állítás. A páros sorszámú osztóvonalak ugyanis $n \cdot m$ darab olyan négyszögre osztják az eredeti négyszöget, amelyekben a páratlan sorszámú osztóvonalak a 2. segédtelet szerint középvonalak (3. ábra). A fekete és fehér négyszögek területének összege tehát az 1. segédtelet szerint külön-külön egyenlő az $n \cdot m$ darab „kétszer kettes” négyszög mindegyikében. Ekkor pedig nyilván az eredeti $ABCD$ négyszögben is egyenlő a szóban forgó területek összege.

Ami a felhasznált segédteleket illeti, az elsőnek a bizonyítása leolvasható a 4. ábráról. (A súlyvonal felezi a háromszög területét, így az egyenlő számokkal jelölt háromszögek területe egyenlő.)

1988-03-116-3.eps

4. ábra

1988-03-116-4.eps

5. ábra

A 2. segédtelet az alábbi, kissé általánosabb alakban látjuk be:

2'. Ha az eredeti $ABCD$ négyszög oldalain az 5. ábra szerint fölvevett E és G , illetve F és H pontok külön-külön azonos arányban osztják a négyszög két-két szemközti oldalát, tehát

$$\frac{AE}{EB} = \frac{DG}{GC} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{és} \quad \frac{BF}{FC} = \frac{AH}{HD} = \frac{\lambda}{\mu},$$

akkor a szemközti oldalak megfelelő osztópontjait összekötő szakaszok M metszéspontja is ezen arányokban osztja a rajta áthaladó osztóvonalakat, vagyis

$$\frac{HM}{MF} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{és} \quad \frac{EM}{MG} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Vektorokat használva egyszerű számolással adódik a 2'. állítás. Ha ugyanis a tér egy rögzített O pontjából a négyszög csúcsaihoz vezető helyvektorok és az adott paraméterek $(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ segítségével felírjuk a HF szakaszt $\alpha : \beta$ arányban osztó M_1 és az EG szakaszt $\lambda : \mu$ arányban osztó M_2 pontokba mutató helyvektorokat, akkor kiderül, hogy a két vektor egyenlő, és így $M_1 = M_2 = M$, vagyis az M pont mindkét osztóvonalat a kívánt arányban osztja.

Az egyes pontok helyvektorait a megfelelő kisbetűvel jelölve:

$$(1) \quad \mathbf{m}_1 = \frac{\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{h}}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha \frac{\lambda \mathbf{c} + \mu \mathbf{b}}{\lambda + \mu} + \beta \frac{\lambda \mathbf{d} + \mu \mathbf{a}}{\lambda + \mu}}{\alpha + \beta}.$$

Az $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{f}$ és $\mathbf{h}$ vektorok felbontásakor felhasználtuk azt az ismert tényt, hogy szakasz adott $(u : v)$ arányú osztópontjába mutató helyvektor a 6. ábrán látható módon fejezhető ki a végpontokba mutató helyvektorok segítségével.

Az (1) jobb oldalán álló kifejezés tagjait a vektorok számmal való szorzásának műveleti tulajdonságai szerint csoportosítva:

$$\mathbf{m}_1 = \frac{\lambda \frac{\alpha\mathbf{c}+\beta\mathbf{b}}{\alpha+\beta} + \mu \frac{\alpha\mathbf{b}+\beta\mathbf{a}}{\alpha+\beta}}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda\mathbf{g} + \mu\mathbf{e}}{\lambda + \mu} = \mathbf{m}_2$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani.

Megjegyzés. A bizonyítás során a 2. segédételben kimondott tény teszi lehetővé az 1. állítás alkalmazását. Ennek igazolása, tehát hogy az egyes osztóvonalakon is egyenlő hosszú szakaszok jönnek létre, a feladat eredetileg kitűzött formájában sem hagyható el. Elvégezhető viszont vektorok nélkül is, bár a közölt bizonyítás jól mutatja használatuk előnyeit.

Egy másik – bár eléggé hosszadalmas – bizonyítási lehetőség, ha a négyszög oldalfelező pontjaiból kiindulva a kerületen levő szakaszok ismételt felezésével jutunk el a feladatban szereplő vonalrendszerig, miközben az $ABCD$ négyszög belsejében létrejövő metszéspontok vizsgálatát során újra és újra fölhasználjuk, hogy tetszőleges négyszög középvonalai felezik egymást. A 2. állítást így csak a $k = l = 2^n$ esetekre láthatjuk be, ami persze a kitűzött feladat megoldásához elegendő.

Az alábbiakban vázoljuk a 2. állításnak a $k+l$ értéke szerinti teljes indukcióval történő bizonyítását. Mivel $k, l \geq 2$, ezért $k+l \geq 4$. Ha $k+l \geq 4$, akkor $k = l = 2$, és az állítás azt mondja, hogy egy négyszög középvonalai felezik egymást.

Legyen most $k+l > 4$, és tegyük fel, hogy a 2. állítás igaz a négyszög kerületének minden olyan k', l' felosztására, ahol $k' + l' < k+l$. Hívjuk az AB és CD osztópontjait összekötő $k-1$ darab osztóvonalat „függőlegesnek”, a további $l-1$ darabot pedig „vízszintesnek”. Mivel $k+l > 4$, föltehető, hogy $l \geq 3$. Ekkor különbözők az AB -hez, illetve CD -hez legközelebb haladó vízszintes osztóvonalak, az $A'B'$ és a $C'D'$ (7. ábra).

Osszuk az $A'B'$ és a $C'D'$ szakaszokat $k-k$ darab egyenlő részre (a 7. ábrán fehér pontok). Ekkor az indukciós feltevés alkalmazható az $A'B'CD$ és az $ABC'D'$ (valódi) négyszögekre. Eszerint az $A'B'CD$ függőleges osztóvonalai a $C'D'$, az $ABC'D'$ függőleges osztóvonalai pedig az $A'B'$ szakaszt osztják $k-k$ egyenlő részre. A megfelelő függőleges osztóvonalak tehát azonosak a két résznégyszögben, hiszen a különböző $A'B'$ és $C'D'$ szakaszok megfelelő osztópontjait kötik össze. Ezek a vonalak tehát éppen az $ABCD$ négyszög függőleges osztóvonalai, amelyek az $A'B'$ és $C'D'$ osztóvonalakat a fehér pontok fölvétele, a további vízszintes osztóvonalakat pedig az indukciós feltevés miatt osztják egyenlő szakaszokra.

Ami a függőleges osztóvonalak felosztását illeti, az indukciós feltevés szerint ezek AB és $C'D'$, illetve $A'B'$ és CD közé eső szakaszait egyaránt $l-1 (\geq 2)$ egyenlő részre osztják a vízszintes osztóvonalak. Mivel $l \geq 3$, a két „szélső” részhez van olyan, amelyik mindkettőjükkel egyenlő, tehát végül is mind az l darab szakasz ugyanolyan hosszú a függőleges osztóvonalakon. Ezzel a bizonyítást befejeztük.