Ha n értéke rendre 1, 2, 3, akkor $\sqrt{3}=1,7\ldots$; $\sqrt{7}=2,6\ldots$; $\sqrt{13}=3,6\ldots$. Megmutatjuk, hogy ha $n \geqq 4$, akkor a kérdéses számjegy az 5-ös.

Mivel $n^2 < n^2+n+1 < (n+1)^2$, ezért

$$\left[\sqrt{n^2+n+1}\right]=n.$$

A tizedesvessző után álló α számjegyre tehát

$$n+\frac{\alpha}{10} < \sqrt{n^2+n+1} < n+\frac{\alpha+1}{10}, \quad \text{azaz}$$
$$10n+\alpha < 10\sqrt{n^2+n+1} < 10n+\alpha+1.$$

Négyzetre emelve és a kapott egyenlőtlenség minden tagjából $100n^2$-et levonva kapjuk, hogy

$$20n\alpha+\alpha^2 < 100n+100 < 20n(\alpha+1)+(\alpha+1)^2.$$

Az első egyenlőtlenségből rendezés után

$$20n(\alpha-5)+\alpha^2 < 100 \tag{1}$$

adódik. A bal oldal n és α szerint is növekvő, ezért ha $n \geqq 4$, akkor (1) csak úgy teljesülhet, ha $\alpha \leqq 5$.

A második egyenlőtlenségből hasonlóan

$$100 < 20n(\alpha-4)+(\alpha+1)^2 \leqq 20n(\alpha-4)+10^2, \quad \text{hisz} \quad \alpha \leqq 9,$$

azaz

$$0 < 20n(\alpha-4), \tag{2}$$

ami akkor és csak akkor igaz, ha $\alpha \geqq 5$.

Ezzel beláttuk, hogy ha n a 3-nál nagyobb, pozitív egész, akkor a $\sqrt{n^2+n+1}$ számban 5-ös számjegy áll a tizedesvessző után.