Két pont „régi távolságát” az egybevágósági transzformációk (pl. eltolás, elforgatás, tengelyes tükrözés) változatlanul hagyják, vagyis ha a P és Q pontok képe P' és Q', akkor $PQ = P'Q'$. Ezért ha a feladat a régi távolságra vonatkozna, akkor a P és Q pontokat bárhogyan elhelyezhetnénk a koordináta-rendszerben, például az ilyenkor szokásos módon úgy, hogy illeszkedjenek az x tengelyre, felezőpontjuk pedig az origó legyen. A feladatban definiált új távolság azonban függ a pontoknak a koordináta-rendszerben való elhelyezésétől. Tekintsük ugyanis például a $(0;0)$ és a $(0;5)$ pontokat. Ezek új távolsága 5. Ha elforgatjuk a $(0;0)$ pont körül a $(0;5)$ pontot úgy, hogy a $(3;4)$ pontba kerüljön (1. ábra), akkor a képpontok új távolsága $|3-0|-|4-0|=7$.

1988-01-023-1.eps

1. ábra

Vannak azonban olyan transzformációk, amelyek nem változtatják meg az új távolságot sem. Ilyen egy $\mathbf{v}(a;b)$ vektorral való eltolás. Ekkor a P képe $P'(x_1+a;\ y_1+b)$, a Q képe $Q'(x_2+a;\ y_2+b)$, és a képpontok új távolsága egyenlő a P és Q új távolságával, hiszen

$$\begin{aligned}&|(x_1+a)-(x_2+a)|+|(y_1+b)-(y_2+b)|=\\&=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|.\end{aligned}$$

Ugyanígy nem változtatja meg az új távolságot az y vagy az x tengelyre vonatkozó tükrözés sem. Ezeknél P képe $(-x_1;\ y_2)$, illetve $(x_1;\ -y_1)$.

Feltehetjük tehát, hogy a koordináta-rendszer origója a két adott pontot összekötő szakasz felezőpontja (ha nem, akkor egy „új távolság”-tartó eltolással odavisszük), az egyik adott pont pedig az I. síknegyedben van (ha nem, akkor tükrözzük az x vagy az y tengelyre, esetleg mindkettőre). Legyenek tehát az adott „fókuszpontok” $F_1(c;\ d)$ és $F_2(-c;\ -d)$, ahol $c \geqq 0$ és $d \geqq 0$, az adott állandó pedig $2a$.

Az $E(x;y)$ pont pontosan akkor van rajta az *új ellipszisen*, ha

(1) $$|x-c|+|y-d|+|x+c|+|y+d|=2a.$$

1988-01-024-1.eps

2. ábra

Ez az egyenlet kilenc különböző egyenletre bomlik aszerint, hogy milyen az egyes abszolút értékekben lévő mennyiségek előjele, vagyis hogy az E pont a 2. ábrán a szaggatott vonalak – az $x=c$, $x=-c$, $y=d$, $y=-d$ egyenletű egyenesek – által határolt kilenc síkrész közül melyikben helyezkedik el. Ha c vagy d értéke 0, akkor a részek száma hatra csökken – a függőleges vagy a vízszintes „középső réteg” az y, illetve az x tengellyé egyszerűsödik – ha pedig $c=d=0$, azaz a két pont, F_1 és F_2 azonos, akkor a tengelyek határolta négy síknegyed marad.

Nyilván

(2) $$|x-c|+|x+c|=\begin{cases}-2x, & \text{ha} \quad x\leqq -c,\\ 2c, & \text{ha} \quad -c<x\leqq c,\\ 2x, & \text{ha} \quad c<x,\end{cases}$$

és hasonlóan

(3) $$|y-d|+|y+d|=\begin{cases}-2y, & \text{ha} \quad y\leqq -d,\\ 2d, & \text{ha} \quad -d<y\leqq d,\\ 2y, & \text{ha} \quad d<y.\end{cases}$$

Ha most ennek megfelelően bontjuk fel (1)-ben az abszolútérték jeleket, akkor rendezés után az új ellipszis egyes tartományokba eső részeire a 3. ábrán látható bekarikázott egyenleteket kapjuk. Zárójelben állnak a megfelelő egyenletek bal oldalára vonatkozó, az adott tartományon érvényes egyenlőtlenségek.

1988-01-024-2.eps

3. ábra

A 2. ábrán satírozott „középső” tartomány kivételével egyenesek – mégpedig részint a tengelyekkel, részint azok szögfelezőivel párhuzamos egyenesek – egyenleteit kaptuk, így az új ellipszisnek a – legfeljebb – nyolc nem korlátos tartományba eső része a megfelelő egyenletű egyenes ide eső szakasza.

Látható, hogy mind a nyolc egyenesnek ugyanakkor – a $c+d<a$ esetben – van pontja a megfelelő tartományok belsejében. Ekkor a „középső” tartományon természetesen nem teljesül a $c+d=a$ feltétel, így ha $c+d<a$, akkor

az új ellipszis egy – a c vagy $d=0$ esetben elfajuló – nyolcszög (4. ábra, $c=d=1,\ \ a=3$). Ha például $c=0$, akkor a nyolcszögnek az x tengellyel párhuzamos oldalai egyetlen ponttá zsugorodnak (5. ábra, $c=0,\ \ d=1,\ \ a=3$), és így hatszöget kapunk, ha pedig $c=d=0$, akkor ugyanez történik az y tengellyel párhuzamos oldalakkal is (6. ábra, $c=d=0,\ \ a=3$), az új ellipszis négyzet. (A két adott pont ilyenkor egybeesik, tehát ebben a speciális esetben adott ponttól adott „új távolságra” levő pontok halmazával, *új körrel* állunk szemben.)

1988-01-025-1.eps

4. ábra

1988-01-025-2.eps

5. ábra

1988-01-025-3.eps

6. ábra

Ha $c+d=a$, akkor a 2. ábra satírozott középső téglalapját kapjuk a határoló szakaszokkal együtt. Az új ellipszis tehát most egy zárt téglalap pontjaiból áll, ami az elfajuló esetekben szakasszá, illetve ponttá zsugorodik.

Végül ha $c+d>a$, tehát a fókuszok új távolsága nagyobb, mint a megadott állandó, akkor egyetlen tartományon sem teljesül a talált egyenlet, így ilyenkor nincs pontja az új ellipszisnek.

*

Az új hiperbolák vizsgálata hasonló, bár a fentinél bonyolultabb esetvizsgálattal jár. Az F_1, F_2 pontok megfelelő fölvételekor tegyük föl azt is, hogy $c\geqq d$ – ez nyilván megtehető. Ezután a $H(x;y)$ pont akkor és csak akkor illeszkedik az *új hiperbolára*, ha

(1')
$$|(|x-c|+|y-d|)-(|x+c|+|y+d|)|=2a.$$

Most az alábbi egyenlőségekre van szükségünk :

(2')
$$|x-c|-|x+c|=\begin{cases} 2c, & \text{ha} \quad x\leqq -c,\\ -2x, & \text{ha} \quad -c<x\leqq c,\\ -2c, & \text{ha} \quad c<x,\end{cases}$$

illetve

(3')
$$|y-d|-|y+d|=\begin{cases} 2d, & \text{ha} \quad y\leqq -d,\\ -2y, & \text{ha} \quad -d<y\leqq d,\\ -2d, & \text{ha} \quad d<y.\end{cases}$$

A „belső” abszolútértékek vizsgálatakor most is a 2. ábra tartományai adódnak. A kilenc lehetőséget a 7. ábra táblázata foglalja össze. (Zárójelben most is az egyenletek bal oldalára a megfelelő tartományokon fennálló egyenlőtlenségek állnak, és a könnyebb hivatkozás céljából megszámoztuk az egyes tartományokat.) Hívjuk még az 5. tartományt az új hiperbola *főtéglalapjának.*

1988-01-026-1.eps

7. ábra

Látható, hogy most a $c+d<a$ esetben nincs pontja az új hiperbolának, tehát itt az szükséges, hogy a megadott állandó ne legyen nagyobb, mint a fókuszok új távolsága.

Most az 1. és 4., illetve a 2. és 3. tartományokon kapott feltételek nem függenek x-től és y-tól, így ezek a síknegyedpárok vagy teljes egészükben hozzátartoznak az új hiperbolához, vagy egyetlen pontjuk sem. A $c\geqq d$ föltevés miatt az 1. és a 4. tartományban az abszolútérték jelek elhagyhatók, a 6. és 7. tartományban pedig csak $y=c-a$, illetve $y=a-c$ formában bonthatók fel, hiszen a 6. és a 7. tartományon $|y|\leqq d$, és így az $y=a+c$, illetve az $y=-a-c$ egyenletű egyenesek az elfajuló esetek kivételével e tartományokon kívül haladnak. Még így is sokkal változatosabb alakzatokhoz juthatunk, mint az előbb, hiszen a „középső” három tartományon (5., 8., 9.) két-két egyenes egyenlete adódik – ha $a=0$, akkor ezek páronként egybeesnek – az pedig a paraméterek (c, d és a) viszonyától függ, hogy ezek az egyenesek hogyan helyezkednek el a megfelelő tartományokhoz képest.

Az új hiperbolának a főtéglalap határára eső pontjait nyilván az adott oldallal szomszédos mindkét tartomány pontjaként megkaphatjuk, így az új hiperbolának a főtéglalap belsejében haladó szakaszai – az $x+y=a$ és az $x+y=-a$ egyenletű egyenesek ide eső részei – éppen a szomszédos tartományokban (6., 7., 8., 9.) haladó félegyenes vagy félegyenesek kezdőpontjában metszik ennek a téglalapnak a kerületét. Kivételt jelent, ha az $|x+y|=a$ egyenletű egyenespár a főtéglalap két átellenes csúcsán halad át – ha $a=c-d$ vagy $a=c+d$ – ilyenkor ugyanis az új hiperbolához a szóban forgó csúcspárra illeszkedő negyedsíkok – 1. és 4., illetve 2. és 3. tartományok – tartoznak.

1988-01-027-1.eps

8. ábra

Mármost a $c \geqq d$ föltevés mellett a főtéglalap és az $|x+y|=a$ egyenletű egyenespár viszonyát az határozza meg, hogy a $[c-d,\ c+d]$ intervallumhoz képest hol helyezkedik el az a. A 8. ábrán – ahol a középpontos szimmetria miatt csak az $x+y=a$ egyenletű egyenes lehetséges helyzeteit rajzoltuk meg – az a), b), c), d), e) típusú elhelyezkedésekre rendre az $a=0$, $0<a<c-d$, $a=c-d$, $c-d<a<c+d$, $a=c+d$ esetekben kerül sor. Így kapjuk a hátsó borító ábráit, és ezzel az új hiperbola típusait, míg a 9. ábra az elfajult típusokat mutatja.

Ezzel a megoldást befejeztük.

1988-01-027-2.eps

9.a) ábra

1988-01-027-3.eps

9.b) ábra

1988-01-027-4.eps

9.c) ábra

Megjegyzés. Ha $l(P,\ Q)$ jelöli a P és Q pontok új távolságát, akkor, mint láttuk, új ellipszisben

$$2(c+d)=l(F_1,\ F_2) \leqq 2a,$$

új hiperbolában pedig

$$2(c+d)=l(F_1,\ F_2) \geqq 2a$$

szükséges, csakúgy, mint a megfelelő „hagyományos” kúpszeletekben. Ezt közvetlenül is megkaphattuk volna, ha felhasználjuk az új távolságokra is érvényes

$$l(P,\ Q)+l(Q,\ R) \geqq l(P,\ R)$$

háromszög-egyenlőtlenséget.

Az „új hiperbola” típusai a füzet hátsó borítójáról:

1988-01-050-1.eps

a) ábra

1988-01-050-2.eps

b) ábra

1988-01-050-3.eps

c) ábra

1988-01-050-4.eps

d) ábra

1988-01-050-5.eps

e) ábra