I. megoldás. Legyen az ötszög AD átlójának felezőpontja F. Ekkor F, M, N és P az $ABCD$ négyszög oldalfelező pontjaiként egy paralelogramma négy csúcsa.

1987-12-456-1.eps

A paralelogramma átlói felezik egymást, ezért az FN szakasz felezőpontja egybeesik az MP szakasz megadott R felezőpontjával. Az RS szakasz így a QFN háromszögnek a QF oldallal párhuzamos középvonala. A QF pedig éppen EA-val párhuzamos középvonal az EAD háromszögben. Így $EA = 2QF = 2(2 \cdot RS) = 4RS$, és abból, hogy mindkettő párhuzamos a QF szakasszal, következik, hogy EA és RS egymással is párhuzamosak.

Ezzel a feladatot megoldottuk.

II. megoldás. Vegyünk fel egy tetszőleges O pontot és indítsunk abból helyvektorokat a megadott pontokhoz, mindegyiküket a megfelelő kisbetűvel jelölve.A vektorok tulajdonságai miatt azt kell megmutatnunk, hogy $4\,\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{AE}$.

Ismeretes, hogy egy szakasz felezőpontjának helyvektora a szakasz végpontjaiba mutató helyvektorok számtani közepe. Ezt felhasználva :

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}), \qquad \mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d}), \qquad \mathbf{r} = \frac{1}{2}(\mathbf{m}+\mathbf{p}) = \frac{1}{4}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}),$$
$$\mathbf{n} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}), \qquad \mathbf{q} = \frac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{e}), \qquad \mathbf{s} = \frac{1}{2}(\mathbf{n}+\mathbf{q}) = \frac{1}{4}(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{e}).$$

Tehát $\overrightarrow{RS} = \mathbf{s}-\mathbf{r} = \frac{1}{4}(\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{e}) - (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}) = \frac{1}{4}(\mathbf{e}-\mathbf{a})$. Másrészt $\overrightarrow{AE} = \mathbf{e}-\mathbf{a}$, vagyis $\overrightarrow{AE} = 4\,\overrightarrow{RS}$.

Az AE és az RS szakaszok tehát valóban párhuzamosak, és az AE szakasz négyszer olyan hosszú, mint az RS szakasz.

Megjegyzés. A megoldásokban nem használtuk ki sem az ötszög konvexitását, sem azt, hogy az A, B, C, D, E pontok egy síkban vannak. A feladat állítása tehát akkor is igaz, ha az A, B, C, D, E pontokat tetszőlegesen vesszük fel a térben.