Először megmutatjuk, hogy minden pozitív egész szám legfeljebb egyféleképpen állhat elő a kívánt alakban. Ha egy A számnak volna két különböző

$$A = a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \cdots + a_k \cdot k! = b_1 \cdot 1! + b_2 \cdot 2! + \cdots + b_k \cdot k! \tag{3}$$

előállítása (a_k vagy b_k esetleg 0), akkor legyen j a legnagyobb index, melyre $a_j \neq b_j$. (3) átrendezéséből

$$|a_j - b_j|j! \leqq |a_1 - b_1|1! + \cdots + |a_{j-1} - b_{j-1}| \cdot (j-1)!.$$

A $0 \leqq a_i \leqq i$, $0 \leqq b_i \leqq i$ feltételek miatt $|a_i - b_i| \leqq i$ $(i = 1,\ 2, 1 \ldots)$, tehát

$$\begin{aligned} j! \leqq |a_j - b_j|j! \ &\leqq 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + (j-1)(j-1)! = \\ &= (2! - 1!) + (3! - 2!) + \cdots + (j! - (j-1)!) = j! - 1, \end{aligned}$$

ami ellentmondás.

A továbbiakban bebizonyítjuk, hogy minden pozitív szám elő is áll a keresett alakban, amihez elegendő megmutatni, hogy tetszőleges k-ra minden $k!$-nál kisebb szám előállítható.

Tekintsük a

$$H = \{a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \cdots + a_{k-1} \cdot (k-1)!;\ \ 0 \leqq a_i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-1\}$$

halmazt. Ennek minden eleme 0 és $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + (k-1)(k-1)! = k! - 1$ között van. Minden egyes a_i egymástól függetlenül $(i+1)$ különböző értéket vehet fel, így H-nak $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k = k!$ eleme van, s az előbb igazolt egyértelműség miatt ezek mind különbözők. Mivel 0-tól $k! - 1$-ig éppen $k!$ darab szám van, tehát $H = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k! - 1.\}$, s ezzel az állítást beláttuk.

Megjegyzések: 1. Az egyértelműség természetesen úgy értendő a feladatban, ahogyan azt számrendszerek esetében megszoktuk, tehát a felesleges „vezető” 0 számjegyektől eltekintünk. Egész szigorúan véve (3)-ban nem lett volna szabad a két különböző felírást azonos hosszúságúnak tekinteni, de nullákkal kiegészítve ez nyilván mindig feltehető.

2. Természetesen konstruktív úton is elő lehet állítani egy adott A szám $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ „számjegyeit”:

Legyen k a legnagyobb olyan szám, melyre $k! \leqq A$. Osszuk el A-t $k!$-sal maradékosan, azaz legyen

$$A = a_k \cdot k! + A_k,$$

ahol k választása szerint

$$0 \leqq a_k \leqq k, \qquad \text{másrészt} \qquad 0 \leqq A_k < k!.$$

Most A_k-t osszuk el $(k-1)!$-sal s í. t.

$$\begin{aligned} &A_k = a_{k-1}(k-1)! + A_{k-1}, && 0 \leqq a_{k-1} \leqq k-1,\ 0 \leqq A_{k-1} < (k-1)! \\ &\vdots \end{aligned}$$

Így valóban megkapjuk az $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ „számjegyeket”.

Sokan nem utaltak azonban arra, hogy $a_i \leqq i$. Mások pedig a maradékos osztás egyértelműségére hivatkoztak az előállítás egyértelműségének „bizonyításakor”, ami pedig nem elegendő.

3. El lehet kezdeni az a_i-k meghatározását a másik irányból is: A-t osszuk el maradékosan 2-vel, majd a hányadost 3-mal, s í. t.:

$$\begin{aligned} A \ &= 2H_1 + a_1, \quad 0 \leqq a_1 < 2, \\ H_1 \ &= 3H_2 + a_2, \quad 0 \leqq a_2 < 3, \\ &\ldots \\ H_{k-1} &= kH_k + a_k, \quad 0 \leqq a_k < k. \end{aligned}$$

Nyilván $A > H_1 > H_2 \ldots$, és legyen $H_k = 0$.

Könnyen igazolható, hogy az így kapott $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ számok megfelelnek. Itt sem elegendő azonban a maradékos osztás egyértelműségére hivatkozni; ki kell egészíteni azzal, hogy

$$A = a_1 + 2(a_2 + 3(a_3 + \cdots + k \cdot a_k) \ldots) \quad \text{és} \quad 0 \leqq a_i \leqq i$$

miatt a_1 szükségképpen A-nak 2-vel való osztási maradéka (hiszen $2(a_2+3(a_3+\cdots+k\cdot a_k)\ldots)$ páros), a_2 szükségképpen H_1-nek 3-mal vett osztási maradéka, s í. t.

4. A feladatban kimondott tétel tovább általánosítható a következő formában:

Adott $a_1,\ a_2,\ \ldots$ egynél nagyobb egészek mellett minden A pozitív egész szám egyértelműen áll elő

$$A = c_1 + c_2 \cdot a_1 + c_3 \cdot a_1 \cdot a_2 + \ldots + c_k \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$$

alakban, ahol $0 \leqq c_i < a_i$ $(i = 1,\ 2,\ \dots)$.

5. Igaz az is, hogy minden 0 és 1 közötti r racionális szám egyértelműen áll elő

$$r = \frac{b_1}{2!} + \frac{b_2}{3!} + \ldots + \frac{b_n}{(n+1)!}$$

alakban, ahol b_k egész, $0 \leqq b_k \leqq k$.

Ez azt is mutatja, hogy a faktoriális alapú számrendszerben pontosan azok a számok racionálisak, amelyek véges sok „jeggyel" felírhatók (szemben a végtelen tizedestört alakú racionális számokkal a tízes számrendszerben).