

Ha  $n$  lépésben fejeződik be az eljárás, tehát  $r_n$  jelöli az utolsó nem nulla maradékot, akkor a maradékok éppen az  $A$  szám 50-alapú számrendszerbeli alakjának „számjegyei”, azaz

$$A = r_n \cdot 50^{n-1} + \dots + r_2 \cdot 50 + r_1.$$

Ekkor nyilván

$$(1) \quad A = r_n(50^{n-1} - 1) + r_{n-1}(50^{n-2} - 1) + \dots + r_2(50 - 1) + R,$$

ahol  $R = r_n + r_{n-1} + \dots + r_1$ , a maradékok – illetve a „számjegyek” – összege. Az (1) jobb oldalán álló összeg tagjaiban az  $50^i - 1$  tényező osztható  $50 - 1 = 49$ -cel, és így 7-tel is, tehát az  $A$  valóban akkor és csak akkor osztható 7-tel, ha  $R = r_n + r_{n-1} + \dots + r_2 + r_1$  osztható vele.

Az eredmény és a bizonyítás a 3-mal, illetve a 9-cel való oszthatóság jól ismert szabályára emlékeztet. Általában, ha egy  $m$  számmal való oszthatóság eldöntésére keresünk hasonló eljárást, akkor az  $m$  bármely többszöröséhez 1-et adva –  $50 = 7 \cdot 7 + 1$  – megfelelő osztót kapunk. A fentiekhez teljesen hasonlóan ugyanis ha  $k > 0$  tetszőleges egész, és  $g = km + 1$ , akkor az  $A$  szám  $g$  alapú számrendszerbeli alakjának számjegyei éppen a feladatban leírt osztási eljárás során kapott maradékok. Most az

$$A = r_n(g^{n-1} - 1) + r_{n-1}(g^{n-2} - 1) + \dots + r_2(g - 1) + R$$

felírást kapjuk, és az állítás azon múlik, hogy

$$g^i - 1 = (km + 1)^i - 1^i$$

osztható  $k \cdot m$ -mel, az alapok különbségével, és így  $m$ -mel is.

Mivel valójában azt láttuk be, hogy  $m|A - R$ , ezért eredményünk kissé általánosabban úgy is fogalmazható, hogy tetszőleges  $A$  számból kiindulva az eljárás során kapott maradékok  $R$  összege és az  $A$  ugyanazt a maradékot adják  $m$ -mel osztva.

A 13 esetében tehát bármely  $13k + 1$  alakú osztó megfelel, pl. a 40.