

Legyen a kocka két szemközti lapja $ABCD$ és $A'B'C'D'$, a kocka élhosszát pedig válasszuk egységnek. A test öt csúcsa közül legalább három a kockának ugyanazon a lapján helyezkedik el. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ez a három csúcs az A , B és C . A másik két csúcs elhelyezkedésétől függően több esetet kell megkülönböztetnünk.

1988-01-021-1.eps

1. ábra

Ha D is csúcsa a testnek, akkor A' , B' , C' vagy D' bármelyikét választjuk ötödiknek, egy négyzet alapú gúlát kapunk (1. ábra), melynek magassága a kocka élével egyenlő, tehát a térfogata $\frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{3}$, a kocka térfogatának harmada.

1988-01-021-2.eps

2. ábra

Ha D nincs a kiválasztott csúcsok közt, akkor A' , B' , C' , D' közül kettőt választottunk. Ha D' nincs köztük, akkor vagy van olyan lap, amelynek mind a négy csúcsát kiválasztottuk, és így az előbb kapott négyzet alapú gúlához jutunk vagy az A' , C' csúcsokat választottuk (2. ábra). Ez a test egybevágó azzal a két másikkal, amelynek A' és D' , illetve C' és D' a fedőlapon lévő csúcsai. Vizsgáljuk például az $ABC'A'C'$ testet (2. ábra). Az A , C , C' , A' pontok egy síkban vannak, egy téglalap négy csúcsát alkotják, maga a test téglalap alapú gúla. Az ötödik csúcs távolsága az alaplaptól a kocka lapátlójának a felével egyenlő, ezért a gúla térfogata: $\frac{1}{3} \left(\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{3}$, vagyis szintén a kocka térfogatának harmada.

1988-01-022-1.eps

3. ábra

Egy esetet kell még megvizsgálnunk, amikor A , B , C , D' és B' (3. ábra) a kiválasztott csúcsok. Ekkor a test két, az ACB' háromszöglap mentén összeillesztett tetraéderből áll. A BD' egyenes merőleges az ACB' háromszög síkjára, tehát a két tetraéder ACB' lapjához tartozó magasságának összege éppen $BD' = \sqrt{3}$, a kocka testátlója. Az ACB' háromszög mindhárom oldala lapátló, tehát területe $(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. A két tetraéder együttes térfogata így $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2}$, azaz a kocka térfogatának fele.

Az öt csúcs által meghatározott test térfogata tehát a kocka térfogatának a fele vagy a harmada.