I. megoldás. Először is jegyezzük meg, hogy hacsak P és Q nem azonosak O-val, akkor a szerkesztés segédpontjai és így $P \oplus Q$ is egyértelműen létrejönnek. Az $O \equiv P \equiv Q$ esetben legyen $P \oplus Q = O$.

A második és a harmadik tulajdonság bizonyítása során többször fel fogjuk használni az alábbi könnyen belátható állítást:

(*) *Ha $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ olyan háromszögek a síkon, amelyekre az A_1B_1 és A_2B_2 valamint a B_1C_1 és a B_2C_2 oldalak párhuzamosak, akkor a két háromszög A_1C_1 és A_2C_2 oldalai pontosan akkor párhuzamosak, ha az A_1A_2, B_1B_2 és C_1C_2 egyenesek egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak* (1.a, b ábra).

1988-02-070-1.eps

1.a ábra

1988-02-070-2.eps

1.b ábra

Ez az úgynevezett *Desargues*-féle háromszögtétel egyik speciális esete. Ez utóbbinak bizonyítása megtalálható pl. *Reiman István:* A geometria és határterületei c. könyvének 341–342. oldalán.

1988-02-070-3.eps

2. ábra

Először az a) tulajdonságot bizonyítjuk. Vizsgáljuk meg, hogy mik lesznek a feladatban leírt A, B, C, D pontok megfelelői, ha $O \oplus P$-t szerkesztjük. Az eljárás szerint$A \equiv O$ (2. ábra), ezért B az x és y egyenesek metszéspontjaként szintén O-nak adódik. A B-n átmenő e-vel párhuzamos egyenes most e, és így a C az e egyenes és a P-n átmenő, y-nal párhuzamos egyenes metszéspontja. Így $D \equiv C$, vagyis $O \oplus P = P$. Az a) állítás tehát igaz.

1988-02-070-4.eps

3. ábra

A b) állítás bizonyításához a 3. ábrát fogjuk használni. Ez ugyan a pontoknak csak egy adott elrendezésére vonatkozik, de a további esetek ugyanúgy kezelhetők. Az A_1, B_1, C_1, D_1 pontok jelölik az A, B, C, D pontok megfelelőit a $P \oplus Q$ szerkesztésénél, míg az A_2, B_2, C_2, D_2 pontok ugyanezek megfelelőit akkor, amikor $Q \oplus P$-t szerkesztjük. Elegendő azt megmutatnunk, hogy a C_1C_2 egyenes párhuzamos x-szel, mert ez azt jelenti, hogy a D_1 és a D_2 pontok egybeesnek, ebből pedig már következik, hogy a $P \oplus Q$ és a $Q \oplus P$ pontok azonosak. Az E, F, G pontok legyenek rendre a B_1A_1 és C_1A_2, B_2A_2 és C_2A_1, B_1B_2 és C_1C_2 egyenesek metszéspontjai. Ekkor a C_1B_1E és a C_2B_2F háromszögek megfelelő oldalai párhuzamosak, hiszen a szerkesztés szerint a megfelelő oldalpárok az e, x és az y egyenesekkel párhuzamosak. Mivel a C_1C_2 és a B_1B_2 egyenesek a G pontban metszik egymást, ezért a (*) állítás szerint az EF egyenes is átmegy a G ponton.

Tekintsük ezután az A_1EA_2 és a C_2GB_2 háromszögeket. A csúcsokat az (A_1, C_2), (E, G), (A_2, B_2) párokba rendezve az összekötő egyenesek átmennek az F ponton, ezen kívül az A_1A_2 és C_2B_2 valamint az A_2E és B_2G egyenesek párhuzamosak (előbbiek az e-vel, utóbbiak pedig az y-nal). A (*) állítás miatt tehát a GC_2 egyenes is párhuzamos az x-szel párhuzamos EA_1 egyenessel. Mivel pedig a GC_2 és a C_1C_2 egyenesek azonosak, a C_1C_2 is a párhuzamos az x-szel, mi pedig éppen ezt akartuk bizonyítani.

1988-02-071-1.eps

4. ábra

A c) állítás bizonyításához tekintsük a 4. ábrát. Az A_1, B_1, C_1, D_1 pontok most is az A, B, C, D pontok megfelelőit jelölik $P \oplus Q$ szerkesztésénél, míg az A_2, B_2, C_2, D_2 pontok ugyanezek megfelelőit $Q \oplus R$ szerkesztésénél. A további segédpontok megfelelőit az alábbi táblázat tünteti föl.

$C,\ Q$	$Q,\ R$	$P \oplus Q,\ R$	$P,\ Q \oplus R$
A_1	A_2	D_1	A_1
B_1	B_2	E	B_1
C_1	C_2	F	G
D_1	D_2	D^*	D^*
$P \oplus Q$	$Q \oplus R$	$(P \oplus Q) \oplus R$	$P \oplus (Q \oplus R)$

Az előző esethez hasonlóan most is azt kell igazolnunk, hogy a C pontnak a $(P \oplus Q) \oplus R$, illetve a $P \oplus (Q \oplus R)$ pontok szerkesztésekor kapott megfelelőit, tehát az F-et és a G-t összekötő egyenes párhuzamos x-szel. Ekkor metszi ki ugyanis az F-en, illetve a G-n átmenő, x-szel párhuzamos egyenes ugyanazt a D^* pontot az e egyenesből.

Az A_2B_2E és a D_2C_2F háromszögek csúcsait összekötő egyenesek közül A_2D_2, B_2C_2 és EF az e-vel és így egymással is párhuzamosak. Az A_2B_2 és C_2D_2, valamint a B_2E és C_2F oldalak párhuzamosak az x, illetve az y egyenessel, ezért a (*) állítás miatt a háromszögek harmadik, A_2E és D_2F oldalai is párhuzamosak. Ekkor viszont az A_2C_1E és a D_2GF háromszögekben – ahol az A_2D_2, C_1G, EF egyenesek párhuzamosak – az A_2E és a D_2F oldalak mellett az A_2C_1 és a D_2G oldalak is párhuzamosak, tehát a (*) állítás miatt a két háromszögben a harmadik oldalak, EC_1 és FG is azok. Mivel EC_1 párhuzamos x-szel, ezért FG is az, és ezt akartuk bizonyítani. A c) tulajdonság tehát szintén teljesül.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

II. megoldás. A szerkesztési eljárás szerint az alábbi vektorok megegyeznek (5. ábra):

1988-02-072-1.eps

5. ábra

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{Q(P \oplus Q)}.$$

Ha most az O pontból helyvektorokat indítunk a megadott pontokhoz, akkor a fentiek szerint

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{Q(P \oplus Q)} = \overrightarrow{O(P \oplus Q)}.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\oplus$ művelet az x egyenesen megegyezik a vektorok összeadásával. A vektorok összeadása viszont rendelkezik az a), b), c) tulajdonságokkal, tehát azokkal a $\oplus$ művelet is rendelkezik.

Ezzel az állítást beláttuk.

Megjegyzések: 1. Az I. megoldás látszólag sokkal bonyolultabb, mint a II. Ez azért van, mert az I. megoldásban csak *Desargues* tételét használjuk fel, míg a II. megoldásban a vektorok műveleti tulajdonságait. Ezeknek a műveleti tulajdonságoknak a precíz bizonyítása legalább olyan hosszadalmas, mint az I. megoldás.

2. Ha x és y egy derékszögű koordináta-rendszer két tengelye, e pedig az $y = x$ egyenletű egyenes, akkor a $\oplus$ művelet megegyezik a valós számok megszokott összeadásával.