Tekintsük a síkbeli négyzetrács rácspontjait egy derékszögű koordináta-rendszer egész koordinátájú pontjainak. Ismeretes, hogy az $A_1(x_1,\,y_1)$, $A_2(x_2,\,y_2)$, $A_3(x_3,\,y_3)$ csúcsú háromszög súlypontjának koordinátái:

$$x_s=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\quad\text{és}\quad y_s=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\,.$$

Egy háromszög súlypontja tehát pontosan akkor rácspont, ha a csúcsok első, illetve második koordinátáinak az összege osztható 3-mal. Hívjunk három rácspontot „jónak", ha ez fennáll rájuk.

Megmutatjuk, hogy a feladatban kimondott állítás a 8-nál nagyobb természetes számokra igaz. Ehhez nyilván elegendő egyrészt 9 pontra igazolni az állítást, másrészt mutatni 8 olyan rácspontot, amelyre az állítás nem teljesül.

1988-01-018-1.eps

1. ábra

Az egyes koordináták háromféle maradékot adhatnak 3-mal osztva, így összesen $3\cdot 3=9$ típusú rácspont lehetséges. Ezeket a lehetőségeket tartalmazza az *1. ábra* táblázata.

Tekintsünk most 9 rácspontot, és helyezzük el őket az *1. ábra* celláiban aszerint, hogy a koordinátáik milyen maradékot adnak 3-mal osztva. Ha van olyan cella, ahová legalább három pont kerül, akkor nyilván készen vagyunk, hiszen három egyenlő maradék összege osztható 3-mal.

Ha sehol sincs kettőnél több, akkor legalább 5 cellába kerül rácspont, hisz a pontok száma 9. Válasszunk ki öt ilyen „foglalt" cellát, illetve mindegyikükben egy-egy rácspontot. Azt állítjuk, hogy ezek között van három jó.

Nyilván bármely két különböző cellához van egy és csak egy olyan harmadik, hogy az e három cellába kerülő három rácspont jó, így összesen $\binom{9}{2}/3=12$ olyan jó hármas van, ahol különböző cellákból valók az elemek.

Tekintsük ezután az 5 kiválasztott rácspont által meghatározott $\binom{5}{2}=10$ jó hármast. Ha belátjuk, hogy ezek a hármasok nem lehetnek valamennyien különbözők, akkor készen vagyunk, ugyanis két különböző pontpár éppen akkor határozza meg ugyanazt a jó hármast, ha az éppen a két pár pontjainak az egyesítése, és így mindhárom pontja szerepel a megadott pontok között.

Osszuk ehhez az összesen 12 jó hármast négy, egyenként három elemű csoportra a *2. ábra* szerint. (Az egyes csoportokban az azonos jelű pontok alkotják a jó hármasokat.)

1988-01-019-1.eps

2.a) ábra

1988-01-019-2.eps

2.b) ábra

1988-01-019-3.eps

2.c) ábra

1988-01-019-4.eps

2.d) ábra

Ha az 5 pont által meghatározott 10 jó hármas között nincsenek azonosak, akkor a *2. ábra* négy csoportja közül legalább egynek mindhárom eleme ott van a fenti 10 jó hármas között. Az egyes csoportokon belül viszont semelyik két hármasnak nincs közös pontja, vagyis egy csoport három hármasának meghatározásához 6 pontra van szükség! Mivel nekünk csak öt pontunk van, a 10 hármas között valóban kell, hogy legyenek azonosak, amiből a fentiek szerint következik, hogy a feladat állítása 9 pont esetén igaz.

Egy nyolcelemű ellenpélda a következő :

$$(0;\,0),\ (0;\,0),\ (0;\,1),\ (0;\,1),\ (1;\,0),\ (1;\,0),\ (1;\,1),\ (1;\,1).$$

Összesen négy cellába kerülnek pontok, mindegyikbe kettő-kettő (*3/a ábra*), és a fentiek szerint nyilván nincs köztük három jó. A *3/b ábrán* nyolc olyan rácspont látható, amelyek közül semelyik három nem esik egy egyenesre, koordinátáik pedig éppen az adott celláknak megfelelő maradékot adják.

1988-01-019-5.eps

3.a) ábra

1988-01-019-6.eps

3.b) ábra

Megjegyzések. 1. A feladatban nem volt lényeges az a megszorítás, hogy a megadott pontok közül semelyik három ne essék egy egyenesre, amennyiben elfajuló háromszög súlypontját is a csúcsok koordinátái számtani közepeként értelmezzük.

2. A feladat annak az ismert állításnak a „kétdimenziós” általánosítása, mely szerint öt egész szám között mindig van három, amelyek összege 3-mal osztható. Tulajdonképpen azt láttuk be, hogy kilenc, egész számokból álló számpár között mindig van három olyan, ahol mind az első, mind pedig a második elemek összege osztható 3-mal. A feladat nyilván tovább általánosítható. Másfelől maga az „egydimenziós” állítás is csak speciális esete az alábbi tételnek : ha adott $2n-1$ darab egész szám, akkor mindig kiválasztható közülük pontosan n, amelyek összege n-nel osztható. Ennek bizonyítása megtalálható például Csirmaz László: Kedvenc problémáim c. rovatában a KÖMAL 1982/10 számának 193–195. oldalán.