

Ilyen sorozat létezik. Igaz ugyanis, hogy minden 4-nél nagyobb négyzetszám „befoglalható egy pitagoraszi számhármassal”, azaz ha  $m^2 > 4$ , akkor van olyan pozitív négyzetszám, amelyet  $m^2$ -hez adva ismét négyzetszámot kapunk. A fenti eredmény ismételt alkalmazásával nyilván tetszőleges, 4-nél nagyobb négyzetszámból kiindulva megfelelő sorozathoz jutunk.

Azt kell tehát igazolnunk, hogy  $m > 2$  esetén az

$$(1) \quad m^2 + x^2 = y^2$$

egyenletnek létezik olyan megoldása, ahol  $x > 0$ . Rendezés és szorzattá alakítás után (1)-ből az  $m^2 = (y - x)(y + x)$  egyenletet kapjuk. Ha  $m^2$ -et fel tudjuk bontani egyező paritású különböző tényezőkre  $m_1 \cdot m_2$  szorzatára ( $m_1 < m_2$ ), akkor az

$$\begin{aligned} y - x &= m_1, \\ y + x &= m_2 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldható a pozitív egészek körében.

Ha  $m$  páratlan, akkor  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = m^2$  megfelel és ekkor az  $x = \frac{m^2 - 1}{2}$ ,  $y = \frac{m^2 + 1}{2}$  megoldást kapjuk, ha pedig  $m$  páros, akkor  $m_1 = 2$  és  $m_2 = \frac{m^2}{2}$ -ből  $x = \frac{m^2 - 4}{4}$ ,  $y = \frac{m^2 + 4}{4}$ .

Ezzel a felhasznált segédtevélt igazoltuk, és így a bizonyítást befejeztük.

*Megjegyzés.* A megoldás során a kérdéses sorozatnak csak a létezését igazoltuk. Látható, hogy végtelen sok megfelelő sorozat van, sőt egy-egy ilyen sorozat még az első elem megadása után sem egyértelmű, hiszen a segédtevéltbeli  $m^2$  általában többféleképpen is felbontható megfelelő tényezőkre szorzatára.

A megoldásból egyébként rekurzió is kiolvasható ilyen sorozatok elkészítésére. Ha  $m_1 = a_1^2 > 4$  az első elem, és az első  $k$  darab elem összegét  $Q_k$  jelöli, akkor egy megfelelő sorozat  $(k + 1)$ -edik eleme az alábbiak szerint számolható:  $m_{k+1} = a_{k+1}^2$ , ahol

$$a_{k+1} = \begin{cases} \frac{Q_k - 1}{2}, & \text{ha } Q_k \text{ páratlan,} \\ \frac{Q_k - 4}{4}, & \text{ha } Q_k \text{ páros.} \end{cases}$$