A metszetsokszög csúcsait nyilván a metsző síknak és a gúla éleinek a metszéspontjaiként kapjuk. Jelölje S a gúla alaplapjának a síkját, T pedig a metsző síkot. Ha S és T párhuzamos, akkor T csak a gúla A csúcsából induló $n-1$ élt metszheti, az ilyen metszetsokszögnek tehát legfeljebb $n-1$ oldala lehet.

Ha S és T metszik egymást, akkor jelölje e a közös egyenesüket. Osszuk a gúla S-re illeszkedő $n-1$ csúcsát három csoportba aszerint, hogy az e egyenes melyik partján helyezkednek el. Jelölje k_1 az e-re illeszkedő, k_2 és k_3 pedig a két különböző félsíkban lévő csúcsok számát. Ekkor nyilván $k_1+k_2+k_3=n-1$.

A metszetsokszög csúcsait a T síknak a gúla alapjának kerületével, illetve az $n-1$ darab oldaléllel való metszéspontjaiként kapjuk. Külön-külön adunk becslést az egyes típusú metszéspontok számára.

A T sík, azaz az e egyenes úgy metszheti a gúla alaplapjának kerületét, ha egy megfelelő oldal az e különböző partjára eső csúcsokat köt össze, vagy pedig valamelyik végpontja az e-re illeszkedik. Mivel pedig az e által meghatározott két félsík bármelyikéből legfeljebb annyi él léphet ki, mint az ide eső csúcsok számának a kétszerese, ezért T az alaplap kerületét legfeljebb $k_1+2\cdot\min(k_2,\ k_3)$ pontban metszheti. ($\min\,(x,\ y)$ az x és y valós számok közül a nem nagyobbikat, $\max\,(x,\ y)$ pedig a nem kisebbiket jelöli.) Ez meg is valósítható, amennyiben a kevesebb/nem több csúcsot tartalmazó félsík nem tartalmaz teljes oldalt, azaz minden itteni csúcs az e másik partjára eső csúccsal van összekötve (1. ábra).

1987-11-392-1.eps

1. ábra

A gúlának az S-re nem illeszkedő A csúcsából induló $n-1$ darab oldalélét a T sík az alaplapon létrejövő metszéspontok számától függetlenül 1, k_2 vagy pedig k_3 pontban metszheti aszerint, hogy az A csúcs hogyan helyezkedik el a metsző síkhoz képest: illeszkedik rá, vagy pedig a T sík elválasztja a k_2, illetve a k_3 elemű ponthalmaztól.

A T sík tehát legfeljebb $k_1+2\cdot\min\,(k_2,\ k_3)+\max\,(1,\ k_2,\ k_3)=k_1+k_2+k_3+\min\,(k_2,\ k_3)=n-1+\min\,(k_2,\ k_3)$ pontban metszheti a gúla éleit, hiszen $\min\,(k_2,\ k_3)+\max\,(1,\ k_2,\ k_3)=k_2+k_3$. Mivel $\min\,(k_2,\ k_3)\leqq\dfrac{k_2+k_3}{2}\leqq\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$, ezért a metszetsokszögnek legfeljebb $n-1+\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ csúcsa lehet.

Könnyű belátni, hogy ez a maximum minden szóba jövő, azaz 3-nál nagyobb n érték mellett elérhető, tehát ha $n\geqq 4$, akkor van olyan n-csúcsú gúla, amelyet egy alkalmas T sík éppen egy $n-1+\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ csúcsú sokszögben metsz.

1987-11-393-1.eps

2.a ábra

1987-11-393-2.eps

2.b ábra

Tekintsünk ugyanis a gúla alaplapjaként egy $n-1$ oldalú sokszöget és egy azt metsző e egyenest az n paritásától függően a 2.a), illetve a 2.b) ábra szerint. Itt $k_1=0$, és ha n páratlan, akkor $k_2=k_3=\dfrac{n-1}{2}$, ha pedig n páros, akkor $k_2=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ és $k_3=\left[\dfrac{n}{2}\right]$. Az alaplapon így mindkét esetben $2k_2$ metszéspont keletkezik.

Ha például T merőleges az alaplap síkjára, és a gúla n-edik csúcsa abban a féltérben van, amelyik nem több, illetve kevesebb csúcsát tartalmazza az alaplapnak, akkor az oldaléleken k_3 metszéspont jön létre. (A 2. ábrákon A' jelöli az A csúcs merőleges vetületét az alaplapon.)

A metszetsokszög oldalainak a száma így $2k_2+k_3$, ami páratlan n-re $2\dfrac{n-1}{2}+\dfrac{n-1}{2}=(n-1)+\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$, páros n-re pedig $\left[\dfrac{n-1}{2}\right]+\left(\left[\dfrac{n-1}{2}\right]+\dfrac{n}{2}\right)=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]+(n-1)$, tehát a kapott maximum valóban elérhető.

Megjegyzések. 1. Bizonyos esetekben a metszetsokszög nem összefüggő, ez azonban nem befolyásolja a csúcsok, illetve élek maximális számára tett megállapításunkat.

2. Ha a gúla konvex, akkor a metsző sík minden lapot legfeljebb egyszer metszhet, tehát a metszetsokszög legfeljebb n oldalú. Ez be is következik, ha T az A csúcsból induló $n-1$ él közül pontosan egyet nem metsz, ekkor ugyanis két szomszédos alapélen keletkezik metszéspont. Az $n=5$ esetben ez látható a 3. ábrán.

1987-11-393-3.eps

3. ábra

A megoldással próbálkozók nagyobb része csak ezzel az egyszerűbb esettel foglalkozott.