Legyen N az AM szakasz azon pontja, melyre $BM = AN$ (1. ábra). Ekkor a BMF és az ANF háromszögek egybevágóak, mert megegyezik két-két oldaluk ($BF = AF$ és $BM = AN$) valamint az általuk bezárt szög ($FAN\sphericalangle = FBM\sphericalangle$, mert mindkettő az $\overset{\frown}{MF}$ ívhez tartozó kerületi szög). Tehát $FM = FN$, az FNM háromszög egyenlő szárú, ezért az F-ből induló magasság T talppontja felezi az NM szakaszt.

1987-12-449-2.eps

1. ábra

Ezek után a bizonyítandó állítás már könnyen adódik:

$$AT = AN + NT = BM + MT.$$

Megjegyzés. A feladatra sokféle megoldás adható, az alábbiakban öt további lehetőséget vázolunk, végiggondolásukat az olvasóra hagyva.

I. vázlat. Forgassuk el a BM húrt a kör középpontja körül pozitív irányba úgy, hogy a B pont az F-be kerüljön (2. ábra), és legyen eközben az M pont képe M'. Ekkor az $M'F$ és az AM húrok párhuzamosak ($\overset{\frown}{MF} = \overset{\frown}{M'A}$), ahonnan a szimmetria miatti egyenlőségek fölhasználásával a bizonyítandó állítást kapjuk.

1987-12-450-1.eps

2. ábra

II. vázlat. Ha L jelöli az FT és a kör második metszéspontját és LB a B'-ben metszi AM-et (3. ábra), akkor az L-nél létrejövő egyíves szögek egyenlősége miatt ALB' egyenlő száru háromszög. Könnyen látható,hogy az A, illetve a B csúcsú kétíves szögek is egyenlők ($ALBM$ húrnégyszög), és ezután $AT = TB'$ és $MB = MB'$ felhasználásával adódik az állítás.

1987-12-450-2.eps

3. ábra

III. vázlat. „Hajtsuk ki" az $\widehat{AMB}$ töröttvonalat az AB' szakasszá a 4. ábra szerint. Ekkor $AF = B'F$-et kell igazolnunk, hisz T ekkor felezi AB'-t.

1987-12-450-3.eps

4. ábra

Thalész tétele szerint az FM-re M-ben állított merőleges a $\overset{\frown}{BA}$ ív F^* felezőpontjában metszi a kört, és így felezi az AMB szöget. Az FM így ennek külső szögét, a BMB' szöget felezi, tehát $BM = B'M$ miatt $BF = B'F$, azaz $AF = BF$ miatt valóban $AF = B'F$.

IV. vázlat. Az F pontból a BM egyenesre bocsátott merőleges talppontját P -vel jelölve könnyen kapjuk, hogy egybevágók az ATF és a BPF, illetve az FTM és az FPM derékszögű háromszögek (5. ábra), ahonnan a bizonyítandó állítás már következik.

1987-12-450-4.eps

5. ábra

1987-12-451-1.eps

6. ábra

V. vázlat. Feltéve, hogy a kör sugara egységnyi, a 6. ábrán látható α, β, γ szögek felhasználásával kapjuk, hogy $AT = 2\ \cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\ \gamma$, $TM = 2\ \sin\ \gamma\ \sin\ \dfrac{\alpha}{2}$ és $BM = 2\ \sin(\alpha + \beta + \gamma)$. Innen egyszerű számolással adódik a bizonyítandó állítás.