

Tekintsük a feladatot megoldottnak (1. ábra). CD olyan szakasz az e egyenesen, amely A -ból is és B -ből is φ szögben látszik. Mivel a CD szakasz egy tetszőleges pontból pontosan akkor látszik φ szögben, ha a pontnak az e egyenesre vonatkozó tükrképéből φ szögben látszik, ezért feltehetjük, hogy az A és a B pontok az e egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak.

1988-03-111-1.eps

1. ábra

A kerületi szögek tételének megfordítása szerint ekkor az A, B, C, D pontok egy k köríven vannak, – az e , azaz CD egyenes által kettévágott síknak az A -t tartalmazó felsíkján, és k -nak O középpontja rajta van az AB szakasz f felező merőlegesén. Az e és f egyenesek metszéspontját jelöljük M -mel. Legyen O' az M kezdőpontú, O -t tartalmazó félegyenes egy tetszőleges pontja, k' pedig legyen az az O' középpontú körív, mely által az e egyenesből kimetszett $C'D'$ szakasz k' pontjaiból φ szögben látszik. Mivel ekkor $C'D'$ az O' -ből 2φ szögben látszik és $O'C' = O'D'$, ezért a C', D' pontokat meg tudjuk szerkeszteni: O' -ből e -re merőlegest állítva és a merőleges mindkét oldalára O' -ből φ szöget mérve, a szögek másik szárai e -t C' -ben és D' -ben metszik.

Az OCD és az $O'C'D'$ háromszögek megfelelő oldalai párhuzamosak, a megfelelő csúcsokat összekötő egyenesek pedig átmennek az M ponton. A két háromszög, és így az általuk meghatározott k és k' körívek is középpontosan hasonlóak az M pontra nézve. Jelöljük az A és B pontok képét a hasonlóság során A' -vel, illetve B' -vel. Mivel egy egyenest egy középpontos hasonlóság vele párhuzamos egyenesbe visz, ezért az AC és $A'C'$, valamint a BD és $B'D'$ egyenesek párhuzamosak. Ezek alapján a szerkesztést már könnyen el tudjuk végezni. Ha szükséges, akkor az egyik pontot tükrözzük az e egyenesre, hogy az AB szakasz az egyenes egyik oldalára kerüljön. Ezután megszerkesztjük az AB szakasz f felező merőlegesét, majd ennek egy tetszőleges O' pontja körül – az előzőekben leírt módon – a k' körívet, valamint a C' és D' pontokat. Az e és f egyenesek M metszéspontjából induló félegyenesekkel a k' körívre vetítjük az A és B pontokat, így kapjuk A' -t és B' -t. Végül A -n, illetve B -n keresztül párhuzamost szerkesztünk az $A'C'$, illetve $B'D'$ egyenesekkel. Ezek a párhuzamosok metszik ki az e egyenesből a keresett pontokat, C -t és D -t. A szerkesztésből adódik, hogy a CD szakasz A -ból is és B -ből is φ szögben látszik.

1988-03-112-1.eps

2. ábra

A látott eljárás – alkalmasan módosítva – a $\varphi > 90^\circ$ esetben is célhoz vezet. Ebből a nagyságviszonyból tüstént következik, hogy az e egyenes szétválasztja az A, O pontokat, továbbá hogy a keresett CD szakasz O -ból vett látószöge $360^\circ - 2\varphi = 2(180^\circ - \varphi) = 2\omega$, ahol $0^\circ < \omega = 180^\circ - \varphi < 90^\circ$ (2. ábra). Ezért a hasonló segédábrára vezető O' középpontot f -nek A -t nem tartalmazó partján választjuk, a fenti C' pontot az $NO'C' \sphericalangle = \omega$ hegyesszög új szárával metsszük ki e -ből (ahol N az O' merőleges vetülete e -re), az O' körüli, C' -n átmenő k' kör kimetszi e -ből D' -t és az MA félegyenesből A' -t. Ezután meghúzzuk a párhuzamost A -n át $A'C'$ -vel valamint $A'D'$ -vel, ezek metszik ki e -ből a keresett C, D pontokat (3. ábra).

1988-03-112-2.eps

3. ábra

A $\varphi = 90^\circ$ esetre nyilvánvaló, hogy k a CD szakasz Thalész-köre, O csak M lehet, és ezzel készen is vagyunk.

Mindeddig feltételeztük, hogy az M pont létrejött. Első hallásra alig hisszük el, hogy a látott elvvel akkor is célba érünk, ha f párhuzamos e -vel, vagyis az AB egyenes merőleges e -re. Annál is kevésbé, mert a megrajzolandó egyenesekben nehezen ismerünk rá az 1. és 3. ábra vonalaira. – Ilyenkor M ideális pont, az oda mutató irány az e iránya, és az eddigiek szerinti O', k, C', D' segédalakzatnak a megfelelő helyzetbe történő hasonlósági visszatranszformálása egybevágósággá és eltolássá specializálódik (4. ábra). Az MA „hasonlósági sugár” párhuzamos e -vel, ez kimetszi k' -ből az A -nak megfelelő A', A'' pontokat. Végül az $A'C'D'$ és $A''C'D'$ háromszögeket A' , illetve A'' csúcsuknál fogva eltoljuk az AC_1D_1, AC_2D_2 helyzetbe: $C'C_1 = D'D_1 = A'A$ – ez az átmásolás itt rövidebben adja az eredményt, mint az eredeti elv szerint az $AC_1 \parallel A'C'$ és $AD_1 \parallel A'D'$ párhuzamosok berajzolása, bár éppen ezek a φ látószögek szárai –, végül hasonlóan $C'C_2 = D'D_2 = A''A$. (Az ábrán C helyesbítendő C' -re.)

1988-03-113-1.eps

4. ábra

Ezek szerint az O', k, C', D' segédalakzat $\varphi = 90^\circ$ esetén fölösleges, $\varphi < 90^\circ$ esetén az A, B pontpár bármilyen helyzetében megszerkeszthető, $\varphi > 90^\circ$ esetén viszont csak akkor, ha az AB egyenes nem merőleges e -re (hiszen merőlegessége esetén nincs O' -nek alkalmas pont).

A megoldások száma azon múlik, hogy az MA félegyenes hány pontban metszi a k' körívet, A' céljára. Ez – folytatólag – azon múlik, hogy a segédalakzatnak a körívet lezáró $C'D'$ szakasza tartalmazza-e az M pontot vagy nem; könnyű belátni, hogy ez a tény független az O' pont helyzetének megválasztásától (ami $C'D'$ hosszát változtathatja). M -nek ez a helyzete jellemezhető az f és e közötti α hegyesszöggel, nem felejtjük azonban, hogy láttunk megoldást az $\alpha = 0^\circ$ esetre is.

Ha $0^\circ < \varphi < 90^\circ$, akkor $\alpha + \varphi < 90^\circ$ esetén M kívül esik a $C'D'$ szakaszon, 2 megoldás van (1. ábra). Nincs olyan helyzet, amelyben MA vagy MB csak érintené vagy elkerülné a körívet, mert $-e^*$ -gal jelölve e -nek f -re való tükörképét, ez metszi k' -t, márpedig MA és MB – szintén egymás képei – az e , e^* egyenesek közti, O' -t tartalmazó szögtartományban haladnak. Ide tartozik az $\alpha = 0^\circ$ eset is.

Az $\alpha + \varphi \geq 90^\circ$ és $\alpha > 0^\circ$ esetben M a $C'D'$ szakaszon van, esetleg az egyik végpontban, a megoldások száma 1.

Ha pedig $90^\circ < \varphi < 180^\circ$, azaz $90^\circ > \omega > 0^\circ$, akkor $\alpha + \omega < 90^\circ$ esetén M nincs rajta a $C'D'$ szakaszon és megoldás sincs, az $\alpha + \omega \geq 90^\circ$ esetben pedig 1 megoldás van.

Összesítjük eddigi megállapításainkat, leszámítva a triviális $\varphi = 90^\circ$ esetet:

$\varphi < 90^\circ$		$180^\circ - \varphi = \omega < 90^\circ$	
$\swarrow$	$\searrow$	$\swarrow$	$\searrow$
$\alpha + \varphi < 90^\circ$	$\alpha + \varphi \geq 90^\circ$	$\alpha + \omega < 90^\circ$	$\alpha + \omega \geq 90^\circ$
2 megoldás	1 megoldás	0 megoldás	1 megoldás
akkor is,			
ha $\alpha = 0^\circ$			

Végül ide iktatjuk a kiindulásnak egy különleges esetét. Mindeddig természetesen feltételeztük, hogy A és B különböző pontok. Ezzel a feladat kezdeti redukálása (B tükrözése e -re) révén kizártuk azt a helyzetet, amikor A és B az e -re nézve tükrös pontpár. Ez a kérdés sehogyan sem illeszthető bele a fenti megoldásba. Külön hozzátesszük tehát : ilyenkor $\varphi < 90^\circ$ esetén e -nek tetszőleges C pontjához van legalább 1 olyan D , hogy $CAD \sphericalangle = \varphi$, és ekkor $CBD \sphericalangle = \varphi$ is teljesül. $\varphi \geq 90^\circ$ esetén akkor van pontosan 1 ilyen D , ha C -t „elég távol” vesszük fel A (és B) e -n levő vetületétől.

Megjegyzések. 1. Sok dolgozat tükrözi ezt az elterjedt tévedést (fél-tudást): „azon pontok mértani helye, amelyekből egy adott szakasz egy adott φ szögben látható, kör”. Nem így igaz, hanem így: KÉT KÖRÍV. Csak a $\varphi = 90^\circ$ esetben igaz, akkor a két félkörív összeáll teljes körré.

2. Feltehetően lesznek olvasók, akik hiányolják, hogy a B pont a megoldás előrehaladásával egyre kevesebb szerephez jut. Indoklás: mihelyt használatba vettük f -et, az AB pontpár „tengelyét”, attól kezdve elég az egyikkel foglalkoznunk, a másik többnyire csak tükörkép. Ez persze a CAD és CBD látószögekre mint eredményekre nem vonatkozik.