Ilyen f függvény létezik, egy ilyet a következő lépésekben szerkeszthetünk meg :

Legyen az f páratlan, azaz minden x -re $f(-x)=-f(x)$. Így $f(0)=0$, és elegendő a függvényt a pozitív számokon megadnunk.

Legyen továbbá $f\left(\frac{1}{n}\right)=n+1$, ha $n \geqq 1$ egész, és $f(m)=-\frac{1}{m-1}$, ha $m \geqq 2$ egész. Ezzel f -et a pozitív egészek és azok reciprokai halmazán is értelmeztük, és az is látszik, hogy ezen a halmazon f rendelkezik az előírt tulajdonsággal.

Végül az ezektől különböző pozitív számokra legyen $f(x)=\frac{1}{x}$, ha $x>1$ és

$f(x)=-\frac{1}{x}$, ha $0<x<1$.

Az f függvényt így minden valós számra értelmeztük, és látható, hogy rendelkezik az előírt tulajdonsággal.

Megjegyzések. 1. Megmutatjuk, hogyan adható meg *valamennyi* olyan f függvény, amelyre fennáll az $f(f(x))=-x$ összefüggés.

A feltételből $f(f(f(x)))=f(-x)$ következik, a bal oldal pedig ugyancsak a feltétel szerint $-f(x)$-szel egyenlő, így minden megfelelő függvény páratlan.

1987-12-449-1.eps

Ha $f(u)=u$, akkor $f(f(u))=f(u)$ is igaz, és az utóbbi egyenlőség bal oldalán $-u$ áll, vagyis $u=-u$, tehát $u=0$. A 0-tól különböző számokra tehát a helyettesített érték és a függvényérték nem lehet egyenlő.

Ha $f(u)=0$, akkor $0=f(0)=f(f(u))=-u$, tehát a függvény csak a 0-hoz rendel 0-t.

Vegyük észre, hogy ha $f(u)=v$ értéke adott, akkor a feltétel a függvényt a v, $-u$ és a $-v$ helyeken is meghatározza: $f(v)=-u$, $f(-u)=-v$ és $f(-v)=u$. Megfordítva, ha az u és v számok egymástól és a 0-tól is különböznek, akkor az $\{u,\ v,\ -u,\ -v\}$ számhalmazon a fenti egyenlőségekkel értelmezett f függvény rendelkezik az előírt tulajdonsággal. Miután pedig az f „nem vezet” ki a fenti számnégyesből, másutt semmilyen megszorítást nem jelent az $f(u)=v$ választás.

Ez azt jelenti, hogy ha a 0-tól különböző valós számokat $\{u,\ v,\ -u,\ -v\}$ alakú négyesekre osztjuk, és az egyes négyeseken belül f -et a fenti egyenlőségekkel adjuk meg, $f(0)$ értékét pedig 0-nak választjuk, akkor megfelelő függvényt kapunk, és megfordítva, minden megfelelő függvény megkapható ezen a módon.

A felosztáshoz nyilván a pozitív számokat kell párokba rendeznünk. A megoldásban adott függvény a kézenfekvő $x \leftrightarrow \frac{1}{x}$ párosítás módosításával jött létre, mert el kellett kerülnünk, hogy az 1 saját magának legyen a párja. A párosítás így a következő:

$$\begin{array}{ll} 1 \leftrightarrow 2, & \\ \frac{1}{2} \leftrightarrow 3, & \qquad x \leftrightarrow \frac{1}{x}. \\ \vdots & \\ \frac{1}{n} \leftrightarrow n+1, & \end{array}$$

Nyilván végtelen sok lehetőség van, a beküldött dolgozatok nagy részében az $\{x \leftrightarrow x+1,\ [x] \text{ páros}\}$ megfeleltetés szerepelt.

2. A feladat csak annyit kérdezett, létezik-e az adott tulajdonságú f függvény. Mint láttuk, ez azon múlik, hogy a pozitív valós számok halmaza párokba rendezhető. Ezt úgy a legkönnyebb megmutatni, ha megadunk egy ilyen elrendezést és ezzel természetesen magát a függvényt is. Ha csupán annyit akarnánk bizonyítani, hogy ilyen felosztás *létezik,* akkor a végtelen halmazok tulajdonságainak alaposabb ismeretére volna szükségünk.