

I. megoldás. Legyen a páros indexű számok összege P , a páratlanoké pedig Q . Ha elvégezzük a $P \cdot Q$ szorzást, akkor a vizsgált összeg minden tagját megkapjuk. Kapunk persze további tagokat is – nem szomszédos indexű x_i -k szorzatait – a feltétel szerint azonban ezek egyike sem lehet negatív.

Így

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n \leq PQ,$$

másfelől $P + Q = 1$ és $P, Q \geq 0$ miatt a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség felhasználásával $PQ \leq 1/4$.

Azt kaptuk, hogy a vizsgált összeg értéke nem lehet $1/4$ -nél nagyobb. Ez a becslés nem javítható, ugyanis ha $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = x_4 = \dots = x_n = 0$, akkor (1) értéke éppen $1/4$.

II. megoldás. Legyen x_k az adott számok – egyik – maximuma. Mivel a számok között nincsen negatív, az (1) kifejezés értéke nem csökken, ha minden tagjában x_k -val helyettesítjük az egyik tényezőt. Tegyük ezt úgy, hogy az x_k -t tartalmazó tagoktól balra a magasabb indexű, tőlük jobbra pedig az alacsonyabb indexű tényezőt cseréljük ki x_k -ra.

Az adott kifejezés értékét A -val jelölve tehát

$$\begin{aligned} A &\leq x_1x_k + x_2x_k + \dots + x_{k-1}x_k + x_kx_{k+1} + x_kx_{k+2} + \dots + x_kx_n = \\ &= x_k(x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} + x_{k+1} + \dots + x_n) = x_k(1 - x_k), \end{aligned}$$

hiszen az adott számok összege 1.

Miután pedig $x_k(1 - x_k) \leq 1/4$, ezért $A \leq 1/4$. Az első megoldásban láttuk, hogy egyenlőség lehetséges.