

Legyen a szóban forgó testátló két végpontja A , illetve G . Ez a két pont rajta van a metsző síkok bármelyikén épp úgy, mint a kocka minden egyes lapjának a kerületén. Így az M metszetsokszög minden oldala valamelyik végpontjaként tartalmazza az A vagy pedig a G csúcsot, ami csak úgy lehetséges, ha M négyszög, melynek A és G átellenes csúcsai. (Mivel a kocka és a metsző sík együttese középpontosan szimmetrikus, ezért M valójában paralelogramma.) Jelölje P és Q az M másik két átellenes csúcsát.

1987-10-312-1.eps

1. ábra

Tekintsük a kocka éleinek és az M -nek a vetületét egy, az AG -re merőleges síkon (1. ábra). Mint ismeretes, az élhálózat vetülete egy $\sqrt{6}/3$ oldalú szabályos hatszög és annak három főátlója. Az M vetülete ekkor egy, a fenti hatszög középpontján átmenő $P'Q'$ szakasz, a négyszög PQ átlójának a vetülete.

1987-10-312-2.eps

2. ábra

A merőleges vetítés miatt $P'A$ és $Q'A$ az APG , illetve a GQA háromszögekben a közös AG oldalhoz tartozó magassággal egyenlők (2. ábra), ezért az M négyszög területe, $t = \frac{1}{2}P'Q' \cdot AG$.

Ebben a szorzatban AG állandó, így t akkor a legkisebb, illetve a legnagyobb, ha a $P'Q'$ vetületszakasz a legkisebb, illetve a legnagyobb. A metsző sík forgása közben a $P'Q'$ a hatszög középpontja körül forog és nyilván minden lehetséges helyzetet fölvesz. Akkor lesz a legrövidebb, ha merőleges a hatszög két szemközti oldalára, és akkor a leghosszabb, ha a hatszög valamelyik főátlójával esik egybe. Ez a két helyzet a 3.a és 3.b ábrán látható metszeteknek felel meg. Az első esetben P és Q élfelező pontok, hiszen vetületeik is azok a hatszög kerületén. Ilyenkor $P'Q'$ a kocka lapátlójával, $\sqrt{2}$ -vel egyenlő, így $t = \frac{\sqrt{6}}{2}$. A második esetben P és Q átellenes kockacsúcsok, $P'Q' = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, így $t = \sqrt{2}$.

1987-10-313-1.eps

3.a ábra

1987-10-313-2.eps

3.b ábra

A metszet területe tehát a $\frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1,225$ és a $\sqrt{2} \approx 1,414$ határok között változik, mindkét szélsőértéket fölveszi, és mivel M területe a két szélsőérték között nyilván folytonosan változik, ezért minden közbülső értéket is fölvesz.