I. megoldás. Legyenek a háromszög oldalai a, b, c, az oldalakhoz tartozó magasságok pedig m_a, m_b, m_c. Ekkor a háromszög területét az ismert módon felírva

$$\frac{1}{2} = \frac{am_a}{2} = \frac{bm_b}{2} = \frac{cm_c}{2},$$

ahonnan

$$1 = \sqrt{am_a} = \sqrt{bm_b} = \sqrt{cm_c},$$

A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség szerint

$$1 = \sqrt{am_a} \leqq \frac{a+m_a}{2},$$
$$1 = \sqrt{bm_b} \leqq \frac{b+m_b}{2},$$
$$1 = \sqrt{cm_c} \leqq \frac{c+m_c}{2}.$$

Ezeket összeadva és rendezve

(1)
$$6 \leqq (a+b+c) + (m_a+m_b+m_c)$$

adódik.

Mivel egy háromszög magassága nem lehet hosszabb a vele közös csúcsból induló oldalak egyikénél sem, ezért $a \geqq m_b$, $b \geqq m_c$, $c \geqq m_a$, azaz:

(2)
$$a+b+c \geqq m_a+m_b+m_c.$$

Ekkor viszont (1) csak úgy teljesülhet, ha $a+b+c \geqq 3$, ami pedig éppen a bizonyítandó állítás.

II. megoldás. Legyenek a háromszög oldalai a, b, c, a kerület felét pedig jelöljük s-sel. Ekkor Héron tételéből

(3)
$$\frac{1}{2} = T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség szerint:

(4)
$$(s-a)(s-b)(s-c) \leqq \left[\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\right]^3 = \left(\frac{s}{3}\right)^3.$$

Ezt egybevetve (3)-mal:

$$\frac{1}{2} \leqq \sqrt{s \cdot \left(\frac{s}{3}\right)^3} = \frac{s^3}{\sqrt{27}}, \quad \text{vagyis:} \quad \frac{\sqrt{27}}{2} \leqq s^2,$$

és ez azt jelenti, hogy

$$2s \geqq \sqrt{6\sqrt{3}} \approx 3,2237.$$

Az eredeti állításnál tehát több is igaz: *Egy 1/2 területű háromszög kerülete legalább* $\sqrt{6\sqrt{3}}$.

Megjegyzések. 1. Az I. megoldásban szereplő (2) egyenlőtlenségben sohasem áll fenn egyenlőség, ezért az ott leírt módszerrel nem lehet bebizonyítani, hogy a kerület legalább $\sqrt{6\sqrt{3}}$.

2. A (4) egyenlőtlenségben $a=b=c$ esetén egyenlőség van, ezért a II. megoldás során kapott eredményünk tovább már nem javítható. Az 1/2 területű szabályos háromszög kerülete éppen $\sqrt{6\sqrt{3}}$.

3. A II. megoldásból az az ismert állítás is kiolvasható, hogy *adott területű háromszögek közül a szabályos háromszög kerülete a legkisebb.*