

Vegyünk fel egy derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy az adott egyenes legyen az y -tengely, az első szakasz kezdőpontja pedig az origó.

1987-10-309-1.eps

Ekkor a k -adik, $2k - 1$ hosszúságú szakasz végpontjának távolsága az origótól az első k páratlan szám összegével egyenlő, ami $((2k - 1) + 1) \cdot k/2 = k^2$. Ennek a szakasznak a felezőpontja tehát $k^2 - \frac{2k - 1}{2}$ távolságra van az origótól.

A k -adik szakaszra szerkesztett szabályos háromszög magassága $\frac{\sqrt{3}}{2}(2k - 1)$, és így e háromszög y tengelyre nem illeszkedő csúcsának koordinátái:

$$\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}(2k - 1), \quad k^2 - \frac{2k - 1}{2} \right).$$

(A \pm jel azért szükséges, mert nem tudjuk, hogy a háromszög az egyenesnek melyik oldalán helyezkedik el.) Ezután már egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy a harmadik csúcsok minden k értékre rajta vannak az $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}$ egyenletű parabolán.

Megjegyzés. A harmadik csúcsok koordinátáinak meghatározása után kereshetjük a parabola egyenletét az általános $y = ax^2 + bx + c$ alakban, mint azt a megoldók nagy része tette. Az első három pont koordinátáit behelyettesítve egy háromismeretlenes egyenletrendszer adódik:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{3}{4}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + c, \\ \frac{5}{2} &= \frac{27}{4}a + \frac{3\sqrt{3}}{2}b + c, \\ \frac{13}{2} &= \frac{75}{4}a + \frac{5\sqrt{3}}{2}b + c. \end{aligned}$$

Ezt megoldva kapjuk a parabola egyenletének együtthatóit.